Analyse IV (HAX403X)[1] : Suites de fonctions, séries entières, Fourier

Notes de cours[2]

Stéphane Baseilhac
stephane.baseilhac@umontpellier.fr
IMAG, Université de Montpellier

1. Licence 2ème année, 2022-2023, Faculté des Sciences, Université de Montpellier
2. Ces notes reposent largement sur un cours antérieur de Ioan Badulescu (IMAG)

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quel est le sujet de ce cours ?

...Essentiellement la notion de *convergence uniforme* pour une suite de fonctions

$$f_n\colon I \to \mathbb{R}$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et n parcourt $\mathbb{N}$. On notera (f_n) une telle suite. Si (f_n) converge uniformément, alors en particulier elle *converge simplement*, c'est-à-dire que pour tout point $x \in I$ la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et est finie ; on peut alors définir *la limite f de (f_n)* par

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

Cependant, la convergence uniforme de (f_n) est beaucoup plus forte que la seule existence de la limite f. Elle permet de transférer à f des propriétés vérifiées par les fonctions f_n, par exemple la continuité. Ce transfert de propriétés aux limites fait de la convergence uniforme une notion centrale dans toute les mathématiques.

Après cette introduction, on commence au chapitre 2 par la définition de la convergence uniforme, et on en donne plusieurs formulations et critères. Ensuite on démontre que si une suite (f_n) converge uniformément et les fonctions f_n sont continues (respectivement, intégrables sur un segment, ou dérivables), alors la limite f de (f_n) l'est aussi. Ces résultats sont contenus dans les "théorèmes d'interversion".

On termine le chapitre par deux compléments, qui sont des applications de la convergence uniforme plus difficiles à démontrer mais dont il faut à minima connaître les énoncés et les principales applications :

— une caractérisation des fonctions définies sur un segment, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, et qui sont *réglées*, c'est-à-dire telles qu'il existe une suite (f_n) de fonctions *en escalier* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f. Cette caractérisation est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la construction de f comme limite d'une suite qui converge uniformément. Elle implique par exemple que toute fonction monotone sur un segment est réglée, donc intégrable d'après un théorème d'interversion.

— le théorème de Stone-Weierstrass, un résultat (très utile en pratique !) d'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par une suite de fonctions polynomiales.

Le chapitres 3 porte sur les *séries de fonctions*, c'est-à-dire les sommes infinies $\sum_n f_n$. On peut voir les séries de fonctions comme des exemples particuliers de suites de fonctions. À l'aide des résultats du chapitre 2 nous obtiendrons des critères de convergence uniforme pour les séries de fonctions.

Nous verrons aux chapitres 4 et 5 que les séries de fonctions permettent de construire des *ensembles* de fonctions munies de propriétés remarquables, par exemple de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Les séries de fonctions permettent aussi de construire des exemples de fonctions ayant des propriétés parfois contre-intuitives, et donc de mieux comprendre les objets avec lesquels on travaille, et les limites de la théorie utilisée. Ainsi, nous décrirons à la fin du chapitre 3 un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui n'est dérivable en aucun point. La démonstration est technique, un peu délicate, mais n'utilise que des outils élémentaires. Ce résultat est important en ce qu'il permet de saisir concrètement un exemple de fonction "pathologique", bien différent des fonctions usuelles que l'on manipule exclusivement jusqu'au semestre 3.

Au chapitre 4 on étudie les fonctions d'une variable réelle $f\colon I \to \mathbb{R}$ qui sont *développables en séries entières*, c'est-à-dire telles que leurs valeurs peuvent s'écrire sous la forme de séries convergentes

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dans un un intervalle ouvert autour de chaque point $x_0 \in I$, où (a_n) est une suite réelle. Ces fonctions sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elles sont rigides (cf le "théorème des zéros isolés") mais très fréquentes ; elles incluent par exemple les fonctions usuelles vues en première année de Licence, et on les retrouve dans de nombreux problèmes différentiels en physique. On termine le chapitre par une application à la résolution d'équations différentielles ordinaires.

Il existe une théorie analogue (mais beaucoup plus riche) des fonctions de *variables complexes* développables en séries entières, qui sera étudiée dans les UE "Fonctions holomorphes" en L3 et M1 MF.

Le chapitre 5 est une introduction à la théorie de Fourier, qui traite les séries associées aux fonctions continues par morceaux et périodiques. Cette théorie est le socle de l'analyse harmonique et de la modélisation mathématique des phénomènes ondulatoires en physique (cf l'article Wikipedia sur l'analyse harmonique). Deux résultats majeurs sont vus : le théorème de Drichlet, et le théorème de Parseval. Ce sont des résultats difficiles à ce niveau.

1.2 Méthode de travail, évaluation

Méthode de travail :

— Avant chaque nouvelle séance de cours :
  - relisez les notes des séances précédentes,
  - lisez les parties de ce cours que j'aurai éventuellement indiquées,
  - soulignez chaque notion "obscure", cherchez des exemples et contre-exemples pour chaque affirmation,
  - ...et préparez vos questions pour la séance de cours qui vient !

— Les définitions ainsi que les énoncés des théorèmes et corollaires du cours doivent être connus parfaitement. Les preuves qui peuvent être demandées lors d'une évaluation sont signalées en marge par le symbole "**(*)**".

— Les exemples sont très importants, il faut que vous arriviez à les manipuler sans difficulté.
En général, les exemples sont là pour forger l'intuition. Ils accompagnent le mathématicien dans toute recherche de solution d'un nouveau problème.

— Vous trouverez en ligne de nombreuses sources d'exercices et des compléments. Je recommande particulièrement le site "Bibmath".

Évaluation : 2 Contrôles Continus, CC1 et CC2, et 1 Contrôle Terminal, CT.
Note de l'UE = MAX(CT, 0.25*(CC1+CC2)+0.5*CT).

Chapitre 2

Suites de fonctions réelles

Dans ce chapitre on note I un ensemble non vide, et $(f_n)_{n\in P}$ une suite de fonctions

$$f_n\colon I \to \mathbb{R}$$

dont les indices n parcourent une partie infinie P de $\mathbb{N}$. Dans la pratique, I sera le plus souvent une partie de $\mathbb{R}$, et $P = \mathbb{N}$, ou bien $P = \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n_0 - 1\}$ quand la formule de f_n n'est définie que pour $n \geq n_0$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour alléger les notations on écrira souvent (f_n) pour $(f_n)_{n\in P}$, et sauf mention contraire $P = \mathbb{N}$.

2.1 Convergences simple et uniforme

On utilisera dans ce chapitre les deux notions suivantes de convergence, qui s'appliquent aux suites de fonctions. Ces deux notions sont fondamentales.

Définition 2.1.1 (CS) *On dit que la suite de fonctions* (f_n) converge simplement *si pour tout* $x \in I$ *la suite de réels* $(f_n(x))$ *converge dans* $\mathbb{R}$. *Dans ce cas la fonction* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *est appelée la* limite simple *de* (f_n).

Noter que l'unicité de la limite d'une suite réelle convergente (ici, $(f_n(x))$ pour chaque $x \in I$) garantit que la fonction limite f est bien définie.

Définition 2.1.2 (CU) *On dit que la suite de fonctions* (f_n) converge uniformément *s'il existe une fonction* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \tag{2.1}$$

ou, de manière équivalente,

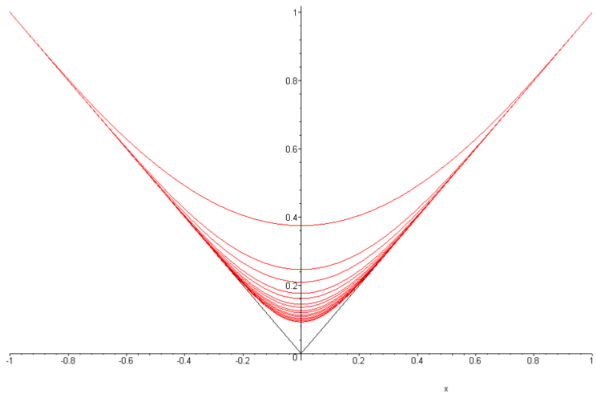
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = 0. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.3 On peut reformuler la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) de limite f en termes de graphes de fonctions. Pour $\epsilon > 0$ notons

$$\Gamma_{f,\epsilon} = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, f(x) - \epsilon < y < f(x) + \epsilon\}.$$

Par exemple, lorsque I est une partie de $\mathbb{R}$, $\Gamma_{f,\epsilon}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui a la forme d'une "bande" autour de $\Gamma_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, y = f(x)\}$, le graphe de f. On appelle $\Gamma_{f,\epsilon}$ un *voisinage* de Γ_f (voir le cours de topologie dans $\mathbb{R}^N$ – HAX404X – pour la définition précise de la notion de voisinage). Alors (f_n) converge uniformément vers f si pour tout $\epsilon > 0$ on a l'inclusion $\Gamma_{f_n} \subset \Gamma_{f,\epsilon}$ pour tout n assez grand.

La figure suivante illustre cette remarque ; elle représente les graphes de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers la fonction valeur absolue sur l'intervalle $[-1, 1]$ (cette figure est tirée de l'article Wikipedia "Convergence uniforme") :

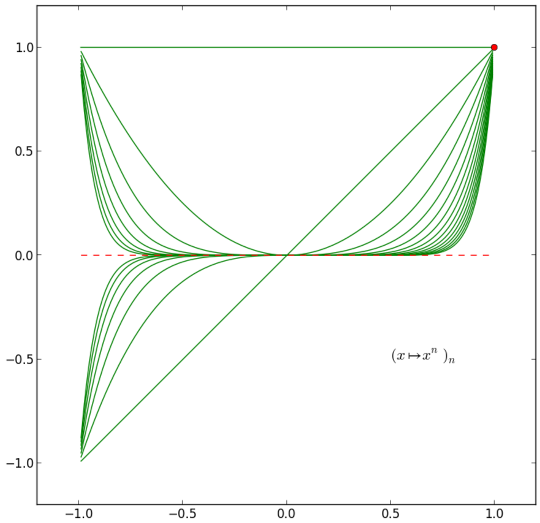


Si la suite (f_n) converge uniformément, elle converge simplement, et sa limite simple est la fonction f. On dit alors que f est la limite uniforme de (f_n). La réciproque est fausse en générale : si une suite de fonctions converge simplement, elle ne converge pas forcément uniformément.

Une règle générale : pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n) on vérifie d'abord si elle converge simplement, et le cas échéant on attaque la convergence uniforme.

Exemple 2.1.4

1. Si $I = [0, 1[$ et $f_n(x) = x^n$, alors (f_n) converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction constante nulle sur $[0, 1[$ (voir la figure ci-dessous, tirée de l'article Wikipedia "Convergence uniforme", qui montre que la convergence sur $]-1; 1]$ de la suite des fonctions $x \mapsto x^n$ n'est pas uniforme).
2. Si $I = [0, a]$, avec $0 < a < 1$, et $f_n(x) = x^n$, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction constante nulle sur $[0, a]$.
3. Si $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$.
4. Si $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^2}$, alors (f_n) converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$.



Combinaisons linéaires et convergences : Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(f_n) + \lambda(g_n) := (f_n + \lambda g_n)$$

est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, les suites de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cette structure vectorielle est compatible avec les convergences simple et uniforme : si (f_n) et (g_n) convergent simplement (respectivement uniformément) vers f et g, alors $(f_n) + \lambda(g_n)$ converge simplement (respectivement uniformément) vers $f + \lambda g$.

Il est aussi vrai que la suite des produits $(f_n g_n)$ converge simplement vers la fonction produit fg, mais en général il n'est pas vrai que $(f_n g_n)$ converge uniformément si l'on suppose seulement que (f_n) et (g_n) convergent uniformément (cf. TD).

Une reformulation dans un cas utile en pratique. Supposons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, que (f_n) converge simplement vers f, et que pour tout n assez grand $|f - f_n|$ atteint son maximum en un point x_n de I. Posons $M_n := |(f - f_n)(x_n)|$. Alors (f_n) converge uniformément vers f si, et seulement si, la suite réelle (M_n) converge vers 0. Voir l'exemple 2.1.4 (3).

Par exemple, si $f - f_n$ est dérivable sur I, un tel point x_n vérifie nécessairement $(f - f_n)'(x_n) = 0$, et il se peut qu'on puisse déterminer x_n par le calcul explicite (la "formule") de la fonction dérivée $f' - f_n'$.

Deux critères qui interdisent la CU :

- D'après (2.2), si (f_n) converge uniformément vers f, alors $\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| < +\infty$, ie. $f - f_n$ est bornée, dès que n est assez grand (même si f et f_n ne sont pas bornées). Donc, si (f_n) converge simplement vers f, et $f - f_n$ n'est pas toujours bornée pour n grand, alors il ne peut pas y avoir convergence uniforme. Voir l'exemple 2.1.4 (4).

- Supposons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, que (f_n) converge simplement vers f, que f est continue en un point $a \in I$, et qu'on peut construire une suite (x_n) de I telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ n'existe pas ou existe mais est différente de $f(a)$. Alors (f_n) ne converge pas uniformément. En effet, ces hypothèses impliquent qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|f(x_n) - f_n(x_n)| > \epsilon$ pour une infinité de valeurs de n, ce qui contredit (2.1).
  Par exemple, la suite de fonctions $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, telles que $f_n(x) = e^n x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$, converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément car $f_n(1/\sqrt{n}) \to -\infty$.

Petit exercice (preuve du second critère ci-dessus) : En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer directement que si (f_n) converge uniformément vers f sur I et f est continue en $a \in I$, alors pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(a)$.

Le critère de Cauchy. Ce critère a été vu en L1 dans le cadre de la convergence des suites de nombres réels. Il est très utile parce qu'il permet de démontrer qu'une suite converge (ou pas) sans connaître sa limite éventuelle. Ce critère se prolonge naturellement à la convergence uniforme des suites de fonctions :

Définition 2.1.5 (Cauchy U) *On dit que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \forall x \in I, |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Proposition 2.1.6 *La suite (f_n) converge uniformément si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

(*) *Preuve.* Supposons que (f_n) converge uniformément. Notons f sa limite. Soit $\epsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$ pour tout $x \in I$ et $n \geq N$. Alors si $m, n \geq N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Donc (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme. Réciproquement, supposons que (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme. Alors pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy *pour les suites réelles*, et donc converge dans $\mathbb{R}$. Par définition cela signifie que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour chaque $x \in I$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq N$ implique $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$ pour tout $x \in I$. Alors en passant à la limite pour $m \to +\infty$ on trouve $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ pour tout $x \in I$. Donc (f_n) converge vers f uniformément. □

Exemple 2.1.7 (Une application frappante) Si (f_n) est une suite de fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément, alors sa limite f est une fonction polynômiale (NB : l'hypothèse de convergence uniforme est nécessaire : par exemple, la suite de fonctions polynômiales $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ converge simplement vers la fonction exponentielle). Pour démontrer ce fait, notons que d'après le critère de Cauchy uniforme pour $\epsilon = 1$ (par exemple), il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f_N(x)| < 1$. Or pour chaque $n \geq N$, $f_n - f_N$ est une fonction polynômiale, donc ne peut être bornée sur $\mathbb{R}$ que si elle est constante. Il existe donc, pour tout $n \geq N$, un réel c_n tel que $f_n - f_N = c_n$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ on obtient que la suite $(c_n)_{n \geq N}$ converge, et que sa limite c vaut $f(x) - f_N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f - f_N = c$, et f est une fonction polynômiale (puisque f_N l'est).

Remarque 2.1.8 (a) Dans l'exemple 2.1.7 il est essentiel que $I = \mathbb{R}$. Nous verrons plus tard (théorème de Stone-Weierstrass, Section 2.8) que lorsque I *est un segment* $[a, b]$, toute fonction continue sur I est limite uniforme de fonctions polynômiales.

(b) Cet exemple montre que la convergence uniforme d'une suite de fonctions *contraint* les propriétés de sa limite. Ainsi, les fonctions *réglées*, qui par définition sont les limites uniformes de fonctions en escalier sur un segment fixé, ont une limite à droite et à gauche en tout point intérieur du segment (cf. Section 2.7).

2.2 La norme sup

Définition 2.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est bornée, on pose $||f|| := \sup_{x \in I} |f(x)|$. Si f n'est pas bornée, on pose $||f|| := +\infty$. Dans les deux cas on appelle $||f||$ la norme sup, ou norme de la convergence uniforme, de f.*

Remarque 2.2.2 Si I est un intervalle compact et f est une fonction continue, alors f est bornée et sa norme sup est finie.

La norme sup permet de reformuler de manière concise la notion de convergence uniforme. Ainsi, d'après (2.2), la suite (f_n) converge uniformément vers f si

$$\lim_{n \to +\infty} ||f - f_n|| = 0.$$

Aussi, (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme si, et seulement si,

$$\lim_{n,m \to +\infty} ||f_m - f_n|| = 0.$$

Trois inégalités fondamentales vérifiées par la norme sup :

1. Si $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ sont bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $||fg|| \leq ||f|| ||g||$, $||\lambda f|| = |\lambda| ||f||$, et (inégalité triangulaire)
$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$
2. Si $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et intégrable, alors (inégalité de la moyenne)
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b - a)||f||.$$
3. Si $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et f' est bornée, alors $|f(b) - f(a)| \leq (b - a)||f'||$ (inégalité des accroissements finis).

De très nombreuses inégalités se démontrent via l'inégalité de la moyenne ou l'inégalité des accroissements finis.

2.3 Théorèmes d'interversion

Dans cette section on suppose que I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur I.

Le lemme suivant est la clé pour tous les résultats à venir.

Lemme 2.3.1 *Supposons que (f_n) converge uniformément vers une fonction f, que I contient un intervalle $]a, b[$ (borné ou non), et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite à droite l_n en a. Alors la suite (l_n) converge, f a une limite à droite en a, et cette limite est la limite de la suite (l_n).*

On a la même conclusion en considérant des limites à gauche en b.

(*) *Preuve.* Pour simplifier les notations, supposons que $a \neq -\infty$, et la limite l_n est finie pour tout n ; les cas où $a = -\infty$, et/ou les limites l_n sont éventuellement infinies se traitent de manière similaire. Montrons d'abord que (l_n) converge, et pour cela qu'elle vérifie le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite (f_n) converge uniformément, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme par la Proposition 2.1.6, et il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon/3$ pour tous $x \in I$ et $m, n \geq N$. Soient donc $m, n \geq N$ fixés. Puisque f_n et f_m ont une limite à droite en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \eta[$ on ait $|f_m(x) - l_m| < \epsilon/3$ et $|f_n(x) - l_n| < \epsilon/3$. Prenons alors un point quelconque $x \in]a, a + \eta[$, par exemple $x = a + \eta/2$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$|l_n - l_m| < |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - l_m| < \epsilon.$$

Ceci montre que (l_n) est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge dans $\mathbb{R}$. Notons l sa limite. Montrons maintenant que f a une limite à droite en a et que cette limite est l. Soit $\epsilon > 0$. Nous savons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique à la fois $|l - l_n| < \epsilon/3$ et $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ pour tout $x \in I$. Soit donc $n \geq N$ fixé. Soit $\eta > 0$ tel $|l_n - f_n(x)| < \epsilon/3$ pour tout $x \in]a, a + \eta[$. Alors pour tout $x \in]a, a + \eta[$ on a

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Ceci montre que f a une limite à droite en a, et que cette limite est l. On adapte facilement les arguments ci-dessus lorsqu'on considère des limites à gauche en b. On a donc démontré le lemme. □

Exercice : adapter la preuve ci-dessus au cas où $a = -\infty$, et/ou les limites l_n sont éventuellement infinies.

Reformulons le lemme 2.3.1. Rappelons que si I est une partie de $\mathbb{R}$, un réel a est *adhérent* à I s'il existe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. On note $\bar{I}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de I. Clairement, si $I =]a, b[$ avec a, b deux réels, alors $\bar{I} = [a, b]$. Cette notion s'étend immédiatement aux cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$: par exemple $+\infty$ est adhérent à tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$, où $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

Corollaire 2.3.2 (Théorème de la double limite) *Si* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I*,* $a \in \bar{I}$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ *existe, alors*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Preuve. Bien lire la conclusion du lemme 2.3.1. □

Ce lemme implique l'énoncé (a) du théorème suivant :

Théorème 2.3.3 *Si* (f_n) *converge uniformément vers une fonction* f*, alors :*

(a) **(Interversion CU/continuité)** *si* $a \in I$ *et toutes les fonctions* f_n *sont continues en* a*, alors* f *est continue en* a *(donc si les* f_n *sont continues sur tout* I*,* f *est continue sur* I*) ;*

(b) **(Interversion CU/intégrabilité)** *si* $[a, b] \subset I$ *et toutes les fonctions* f_n *sont intégrables sur* $[a, b]$*, alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$*, la suite réelle* $(\int_a^b f_n(x)dx)$ *converge, et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Preuve. (a) Notons $l_n^{\pm} := \lim_{x\to a^{\pm}} f_n(x)$, les limites de f_n à droite et à gauche de a respectivement. Les fonctions f_n sont continues, donc $l_n^{\pm} = f_n(\lim_{x\to a^{\pm}} x) = f_n(a)$. Puisque (f_n) converge uniformément, le lemme implique $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \lim_{n\to+\infty} l_n^{\pm}$. Mais $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$, alors $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = f(a)$, ce qui montre que f est continue en a.

(b) On suppose $a < b$, sans quoi le résultat est trivial. Rappelons que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier Ψ_1' et Ψ_2' sur $[a, b]$ telles que $\Psi_1' \le f \le \Psi_2'$ et $\int_a^b(\Psi_2'(t) - \Psi_1'(t))dt < \epsilon$. Soit donc $\epsilon > 0$. Il faut construire Ψ_1' et Ψ_2' à partir de l'hypothèse que chaque fonction f_n est intégrable, et uniformément proche de f. D'abord, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge N$ implique $||f - f_n|| < \epsilon/4(b - a)$. Ensuite, puisque f_N est intégrable il existe deux fonctions en escalier Ψ_1 et Ψ_2 sur $[a, b]$ telles que $\Psi_1 \le f_N \le \Psi_2$ et $\int_a^b(\Psi_2(t)-\Psi_1(t))dt < \epsilon/2$. On pose alors $\Psi_1' = \Psi_1 - \epsilon/4(b-a)$, et $\Psi_2' = \Psi_2 + \epsilon/4(b-a)$. Ce sont évidemment des fonctions en escalier, et d'après le choix de N, pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned}\Psi_1'(x) = \Psi_1(x) - &\frac{\epsilon}{4(b-a)}\\ &\le f_N(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \le \Psi_2(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} = \Psi_2'(x).\end{aligned}$$

Enfin $\int_a^b(\Psi_2'(t) - \Psi_1'(t))dt = \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b(\Psi_2(t) - \Psi_1(t))dt < \epsilon$. Cela prouve que f est intégrable. De plus, pour tout $n \ge N$ on a

$$\left|\int_a^b (f(t) - f_n(t))dt\right| \le (b-a)||f - f_n|| < \epsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. □

Remarque 2.3.4 (1) La convergence d'une suite (f_n) ne regarde que le comportement de ses termes f_n pour n grand, donc ce théorème reste vrai si on remplace les conditions portant sur "toutes les fonctions f_n" par ces mêmes conditions portant sur "toutes les fonctions f_n à partir d'un certain rang".
(2) La continuité est une propriété locale, donc dans (a) il suffit de supposer que (f_n) converge uniformément vers f sur un sous-intervalle ouvert de I contenant le point a.

Il n'est pas difficile de montrer par des contre-exemples que la convergence uniforme de (f_n) vers f (localement, pour (a)) est nécessaire pour que ces énoncés soient vrais. En effet :

- Pour (a), on peut considérer la suite de fonctions $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}$. Elle converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction f nulle sur $[0,1[$ et telle que $f(1) = 1$. La fonction limite f n'est pas continue à gauche en 1, alors que toutes les f_n le sont.
- Pour (b) on peut considérer la suite de fonctions $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, définie par $f_n(x) = 1$ si $x = k/2^n$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$, et $f_n(x) = 0$ sinon. Chaque f_n est intégrable sur $[0,1]$ (elle a un nombre fini de discontinuités), et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 sur l'ensemble $\{k/2^n, n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}\}$ et qui est nulle ailleurs. Cette fonction n'est pas intégrable puisque ses points de discontinuités forment une partie dense de $[0,1]$ (ses sommes de Riemann peuvent être égales à 0 ou 1 selon la subdivision de $[0,1]$ choisie).

2.4 Convergence uniforme sur les compacts

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur I.

Définition 2.4.1 (CUC) *On dit que (f_n) converge uniformément sur les compacts si (f_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ inclus dans I.*

La convergence uniforme de (f_n) sur I implique évidemment la convergence uniforme sur les compacts, mais la réciproque est fausse.

Exemple 2.4.2
1. La suite (f_n) de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par la formule $f_n(x) = x/n$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$. La convergence n'est pas uniforme, mais elle est uniforme sur les compacts.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions réelles définies sur $]1, +\infty[$ par la formule

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{-x}$$

converge uniformément sur les compacts. En effet, pour tout $x \in]1, +\infty[$ la série réelle $f(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-x}$ converge d'après le critère de Riemann. La n-ième somme partielle de cette série est $f_n(x)$, donc ceci montre que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f\colon]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Fixons un segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Notons $R_n(x) = f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-x}$, c'est-à-dire le reste de la série $f(x)$. Pour tout $x \in [a, b]$ on a $k^{-x} \leq k^{-a}$, donc $R_n(x) \leq R_n(a)$. La série $f(a)$ étant convergente, $\lim_{n\to+\infty} R_n(a) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} ||f - f_n||_{[a,b]} = \lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{[a,b]} = 0$, ce qui montre que la convergence de (f_n) est uniforme sur $[a, b]$.

Remarque importante : dans le théorème 2.3.3 on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme par la convergence uniforme sur les compacts. C'est évident pour (b), et pour (a) cela résulte du fait que la continuité est une propriété *locale* (i.e. qui ne regarde que le comportement au voisinage de chaque point). Par exemple, la fonction limite de l'exemple 2.4.2 (2), qui n'est pas exprimable de façon plus explicite, est continue puisqu'elle est limite uniforme sur les compacts de fonctions continues.

2.5 CU et dérivabilité

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.5.1 (Interversion CU/dérivabilité) *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur I et à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n') des dérivées converge uniformément sur les compacts vers une fonction h, et qu'il existe un point $x_0 \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(x_0))$ converge. Alors la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f qui est dérivable sur I, et on a $f' = h$. De plus, la convergence de (f_n) est uniforme sur les compacts.*

(*) *Preuve.* Il nous faut "deviner" la limite f de la suite (f_n). Notons d'emblée que d'après le théorème 2.3.3, la fonction h est continue puisqu'elle est limite uniforme sur les compacts de la suite de fonctions continues (f_n'). Pour que $f' = h$, le seul candidat possible pour f est la fonction définie en tout point $x \in I$ par

$$f(x) := l + \int_{x_0}^{x} h(t)dt$$

où $l := \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$. Vérifions maintenant que f convient. Puisque h est continue, par le théorème fondamental de l'analyse f est bien dérivable et on a $f' = h$. Montrons que f est limite simple de la suite (f_n) (l'hypothèse ne nous le donne qu'en x_0 !). Soit $x \in I$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - l = \int_{x_0}^{x} h(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) - l. \end{aligned}$$

Dans la seconde égalité on a utilisé le théorème 2.3.3 (b). Ceci montre que la suite $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$, donc que (f_n) converge simplement vers f. Montrons maintenant que la convergence est uniforme sur les compacts. Soit $[a,b]$ un intervalle inclus dans I. Montrons qu'il y a convergence uniforme sur $[a,b]$. Quitte à élargir $[a,b]$ on peut supposer que $x_0 \in [a,b]$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $||h - f'_n||_{[a,b]} < \epsilon/(b-a)$. Alors pour tous $n \geq N$ et $x \in [a,b]$ on a

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \int_a^x f'(t) - f'_n(t)dt \right| \leq (x-a)||h - f'_n||_{[a,b]} < \epsilon.$$

Ceci conclut la preuve. □

Remarque 2.5.2 (1) Le résultat reste vrai si l'on remplace l'hypothèse que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ par l'hypothèse plus générale que f_n est dérivable pour tout n (cf. TD).
(2) La conclusion du théorème peut se réaliser sans que la suite des dérivées converge. C'est le cas, par exemple, de la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = \sin(nx)/n$, qui converge uniformément vers la fonction nulle, dérivable, mais dont la suite des dérivées ne converge pas (en effet, par exemple la suite $(f'_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*} = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour valeurs d'adhérence tous les points du segment $[-1,1]$).

L'hypothèse de convergence uniforme sur les compacts de la suite des dérivées est nécessaire. Par exemple, considérons la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (uniformément) vers la fonction $f : x \mapsto |x|$. Cette fonction n'est pas dérivable en 0, donc en prenant la contraposée du théorème on voit que la suite des dérivées (f'_n) ne peut pas converger uniformément sur les segments qui contiennent 0. En effet, on vérifie que (f'_n) converge simplement vers la fonction égale à -1 sur $]-\infty, 0[$, nulle en 0, et égale à 1 sur $]0, +\infty[$. Cette fonction n'étant pas continue en 0, la convergence de (f'_n) ne peut pas être uniforme en son voisinage (d'après le théorème 2.3.3 (a)).

Insistons sur le fait que la conclusion du théorème est bien la convergence uniforme *sur les compacts*. Par exemple, la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = \arctan(x/n)$, converge uniformément sur les compacts vers la fonction nulle, et la suite des dérivées $f'(x) = n/(n^2 + x^2)$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais la suite (f_n) ne converge pas uniformément.

2.6 Les théorèmes de Dini

Sous certaines hypothèses la convergence simple implique la convergence uniforme. Le théorème suivant contient deux résultats en ce sens, connus sous le nom de "théorèmes de Dini".

Théorème 2.6.1 (Dini) *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles. On a :*

(a) Si (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, les fonctions f_n sont continues, et la suite (f_n) est croissante (ie. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tous $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$), alors la convergence est uniforme.

(b) Si (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, et les fonctions f_n sont croissantes, alors la convergence est uniforme.

On a la même conclusion en remplaçant l'hypothèse "croissante" par "décroissante" (remplacer chaque fonction f_n par $-f_n$).

Remarque 2.6.2 (1) Les hypothèses du théorème n'ont pas à être vérifiées par *toutes* les fonctions f_n : il suffit qu'elles le soient pour tout n assez grand, ie. $n \geq N$ pour un certain entier N. Par exemple, considérons la suite de fonctions $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = n \sin(x/n)$; (f_n) converge simplement vers la fonction identité. Étant donné un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{-1}\max(|a|,|b|) \leq \pi/2$. Comme la fonction sin est croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, ce choix de N implique que les fonctions f_n, $n \geq N$, sont croissantes sur le segment $[a,b]$. Par le théorème (b), on peut donc conclure que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$. Le segment est quelconque, donc (f_n) converge uniformément sur les compacts vers la fonction identité.
(2) Enfin, notons qu'il est parfois possible de décomposer un intervalle donné $[a,b]$ en sous-intervalles, sur lesquels l'un des théorèmes de Dini s'applique ; par exemple, en sous-intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Preuve. (a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que la convergence n'est pas uniforme. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ vérifiant $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, comme $[a,b]$ est fermé borné la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans $[a,b]$. Notons l sa limite. Puisque la suite $(f_n(l))$ converge vers $f(l)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_N(l) - f(l)| < \epsilon/3$. Puisque f et f_N sont continues, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - l| < \eta$ implique $|f(x) - f(l)| < \epsilon/3$ et $|f_N(x) - f_N(l)| < \epsilon/3$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon$ dès que $|x - l| < \eta$. La suite $(f_n(x))$ est croissante par hypothèse, et elle converge vers $f(x)$, donc pour tout $n \geq N$ on a $f_N(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$, et

$$|f_N(x) - f(x)| = f(x) - f_N(x) \geq f(x) - f_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$$

Alors $|x - l| < \eta$ implique $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Finalement, du fait que $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = l$, il existe $n = n_k \geq N$ tel que $|x_n - l| < \eta$, et donc $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \epsilon$. Ceci contredit le choix de ϵ au début de la preuve, et montre donc que la convergence est uniforme.

(b) Cette fois nous allons prouver directement que la convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in [a,b]$. Pour cela on va approximer f sur $[a,b]$. Puisque f est continue et $[a,b]$ est fermé borné, f est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a,b]$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $(b-a)/M < \eta$, et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, M\}$ posons $x_k := a + k(b-a)/M$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $|f(x_k) - f_n(x_k)| < \epsilon/2$ pour tout

$k \in \{0, 1, 2, ..., M\}$. Prenons $n \geq N$ fixé, et $x \in [a, b]$; il existe $k \in \{0, 1, ..., M-1\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Alors, si $|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x)$ on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) &\leq f(x) - f_n(x_k) \\ &\leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)| < \epsilon.\end{aligned}$$

Dans la première inégalité on a utilisé le fait que f est croissante. La troisième vient du choix des x_k, tels que $|x - x_k| < x_{k+1} - x_k < \eta$, et de $n \geq N$. De même, si $|f(x) - f_n(x)| = f_n(x) - f(x)$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| = f_n(x) - f(x) &\leq f_n(x_{k+1}) - f(x) \\ &\leq |f_n(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - f(x)| < \epsilon.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Les exemples ci-dessous montrent qu'aucune hypothèse des deux théorèmes de Dini n'est superflue :

- **(L'intervalle de définition est borné)** Considérons la suite de fonctions $f_n \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = x/n$. Les fonctions f_n sont continues et croissantes, la suite de fonctions (f_n) est décroissante, sa limite simple (qui est la fonction nulle) est continue, mais pourtant elle n'est pas limite uniforme de (f_n).
- **(L'intervalle de définition est fermé)** Considérons la suite de fonctions $f_n \colon [0, 1[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = x^n$. Les fonctions f_n sont continues et croissantes, la suite de fonctions (f_n) est décroissante, sa limite simple (qui est la fonction nulle) est continue, mais pourtant elle n'est pas limite uniforme de (f_n).
- **(La fonction limite est continue)** Considérons la suite de fonctions $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(x) = x^n$. Les fonctions f_n sont continues et croissantes, la suite de fonctions (f_n) est décroissante, mais sa limite simple (qui est la fonction nulle sur $[0, 1[$ et égale à 1 en 1) n'est pas limite uniforme de (f_n).
- **(Les fonctions f_n sont continues dans le théorème 2.6.1 (a))**. Considérons la suite de fonctions $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies par $f_n(0) = 0$, $f_n(x) = 1$ sur $]0, 1/n[$, et $f_n(x) = 0$ pour $x \in [1/n, 1]$. La suite de fonctions (f_n) est décroissante, sa limite simple, qui est la fonction nulle est continue, mais la convergence n'est pas uniforme.

2.7 Les fonctions réglées

On introduit ici un espace de fonction dont la définition est *directement* liée à la convergence uniforme :

Définition 2.7.1 *On dit qu'une fonction $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si f est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Cette définition est "constructive". Elle ne dit rien des propriétés des fonctions réglées, par exemple s'il existe des fonctions de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ qui ne sont pas réglées. Des exemples seront décrits dans la remarque 2.7.7 (2). Notre but ici est de caractériser les fonctions réglées d'après leur *régularité*. Commençons par quelques notations.

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a,b[$, ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Pour tout $x \in]a,b[$, on pose

$$o(x) := \max\big(|f(x^-) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|, |f(x) - f(x^+)|\big)$$

où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont respectivement la limite à gauche et à droite de f en x. On pose également $o(a) = |f(a) - f(a^+)|$ et $o(b) = |f(b^-) - f(b)|$.

Définition 2.7.2 *Pour tout $x \in [a,b]$, on appelle oscillation de f en x le nombre réel $o(x)$.*

Si $\epsilon > 0$, on note

$$A_\epsilon = \{x \in [a,b], o(x) > \epsilon\}.$$

Notez que $x \in [a,b]$ est un point de discontinuité de f si, et seulement si, $o(x) \neq 0$, ie. si, et seulement si, $x \in A_\epsilon$ pour un $\epsilon > 0$.

Lemme 2.7.3 *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a,b[$, ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Alors :*

(a) pour tout $\epsilon > 0$, A_ϵ est fini ;

(b) l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

(*) *Preuve.* (a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que A_ϵ est infini. Puisque A_ϵ est inclus dans $[a,b]$, qui est un intervalle fermé et borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe alors une suite de points de A_ϵ qui est non stationnaire et converge dans $[a,b]$. Notons l la limite de cette suite. Supposons d'abord que $l \in]a,b[$. Puisque f est continue à gauche en l, il existe $\eta_l^- > 0$ tel que pour tous $s,t \in]l-\eta_l^-, l[$ on a $|f(s) - f(t)| < \epsilon/2$. Ceci implique $]l-\eta_l^-, l[\cap A_\epsilon = \emptyset$. De même, il existe $\eta_l^+ > 0$ tel que pour tous $s,t \in]l, l+\eta_l^+[$ on a $|f(s) - f(t)| < \epsilon/2$. Donc $]l, l+\eta_l^+[\cap A_\epsilon = \emptyset$, et finalement $]l-\eta_l^-, l+\eta_l^+[\cap A_\epsilon$ est vide ou réduit à l. Or ceci contredit le fait que, si l est limite d'une suite non stationnaire de A_ϵ, dans tout intervalle ouvert contenant l se trouvent une infinité de termes distincts de A_ϵ. Donc A_ϵ est un ensemble fini. Si $l = a$ le raisonnement est le même en prenant un intervalle de la forme $]a, a+\eta_a[$. Si $l = b$ on prend un intervalle de la forme $]b-\eta_b, b[$.

(b) Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f. On a $D = \cup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$. Toute union dénombrable d'ensembles finis est dénombrable, et nous avons vu en (a) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $A_{1/n}$ est fini. Donc D est dénombrable. □

Exemple 2.7.4 (Fonctions monotones) À coté de l'exemple évident des fonctions continues par morceaux, les fonctions monotones sur un segment $[a,b]$ constituent un exemple important de fonctions qui admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a,b[$, ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b. Par exemple, pour une fonction f croissante, on peut montrer sans peine que $f(a^+)$ et $f(b^-)$ existent ainsi que $f(x^\pm)$ pour tout $x \in]a,b[$. En fait,

$$f(x^-) = \sup_{t\in[a,x[} f(t) \ , \ f(x^+) = \inf_{t\in]x,b]} f(t).$$

(Preuve développée en cours).

Afin de démontrer le résultat suivant nous avons besoin de généraliser la notion d'oscillation de f, qu'on a défini ci-dessus en chaque point x de $[a,b]$, à tout sous-ensemble de $[a,b]$:

Définition 2.7.5 *Pour toute partie non-vide U de $[a,b]$, on appelle*

$$o(U) := \sup_{x\in U} f(x) - \inf_{x\in U} f(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

l'oscillation de f sur U.

On peut vérifier en exercice que pour tout $x \in]a,b[$ on a (et une formule analogue lorsque $x = a$ ou b) :

$$o(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} o\left(]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap[a,b]\right).$$

Théorème 2.7.6 *Une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si, et seulement si, f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a,b[$ ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b.*

Preuve. Une fonction en escalier possède une limite à droite et à gauche en tout point. Donc une limite uniforme de fonctions en escalier aussi, par le lemme 2.3.1.

Réciproquement, supposons que f a une limite à gauche et à droite en tout point. Pour démontrer l'existence d'une suite de fonctions en escalier (Φ_n) sur $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} ||f-\Phi_n|| = 0$, il suffit de de montrer que pour chaque $\epsilon > 0$ on peut construire une fonction Φ en escalier telle que $||f-\Phi|| < \epsilon$ (on posera alors Φ_n la fonction associée à ϵ_n, où (ϵ_n) est une suite réelle qui décroit vers 0).

Ayant fixé $\epsilon > 0$, afin de construire Φ on aimerait déterminer une subdivision finie $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{M-1} < x_M$ de $[a,b]$ telle que $f(x)$ est suffisamment proche de $f(x_k)$ ou $f(x_{k+1})$ lorsque $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{0,1,\ldots M-1\}$, puis poser $\Phi(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots M\}$, et définir Φ sur $]x_k, x_{k+1}[$ comme la moyenne des valeurs extrêmes de f sur cet intervalle (par exemple). Lorsque f est continue sur $[a,b]$ on peut facilement procéder de cette façon : la continuité uniforme, qui est une conséquence du théorème de Heine, permet de construire la subdivision de sorte que Φ et f soient ϵ-proches sur $]x_k, x_{k+1}[$. La difficulté ici est que les variations de f ne sont mesurées que ponctuellement, par l'oscillation $o(x)$ en chaque point $x \in [a,b]$. Il faut donc commencer par montrer qu'un contrôle de $o(x)$ peut être étendu à un contrôle des variations de f sur un voisinage de x. C'est ici qu'intervient la notion d'oscillation introduite dans la définition 2.7.5.

Soit donc $\epsilon > 0$. Supposons d'abord que pour tout $x \in [a,b]$ on a $o(x) < \epsilon/16$. Montrons que pour tout $x \in]a,b[$ il existe un intervalle ouvert I_x contenant x et inclus dans $]a,b[$ tel que $o(I_x) < \epsilon$. Par définition de la limite à gauche en x il existe $\eta_x^- > 0$ tel que $x - \eta_x^- < y < x$ implique $|f(y) - f(x^-)| < \epsilon/16$. Alors pour tout $y \in]x - \eta_x^-, x[$ on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x^-)| + |f(x^-) - f(x)| < \epsilon/16 + \epsilon/16 = \epsilon/8$$

où l'on a utilisé l'hypothèse $o(x) < \epsilon/16$ dans la seconde inégalité. Donc pour tous points z, y dans l'intervalle *fermé à droite* $]x - \eta_x^-, x]$ on a

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f(x)| + |f(y) - f(x)| < \epsilon/4.$$

De même on montre qu'il existe $\eta_x^+ > 0$ tel que pour tous z, y dans l'intervalle *fermé à gauche* $[x, x + \eta_x^+[$ on a $|f(z) - f(y)| < \epsilon/4$. Alors pour tous $z, y \in]x - \eta_x^-, x + \eta_x^+[$ on a

$$|f(z) - f(y)| < \epsilon/2.$$

(ce qui précède le montre si y et z sont tous les deux à gauche de x ou à droite de x, et sinon on écrit $|f(z) - f(y)| < |f(z) - f(x)| + |f(x) - f(y)|$). Posons $I_x =]x - \eta_x^-, x + \eta_x^+[$. En prenant les limites $f(z) \to \sup_{t \in I_x} f(t)$ et $f(y) \to \inf_{t \in I_x[} f(t)$ dans l'inégalité ci-dessus on obtient $o(I_x) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, ce qu'il fallait démontrer. Il existe également $\eta_a, \eta_b > 0$ tels que $o(I_a) < \epsilon$ et $o(I_b) < \epsilon$, où $I_a := [a, a + \eta_a[$ et $I_b :=]b - \eta_b, b]$.

On a évidemment $[a,b] = \cup_{x \in [a,b]} I_x$. Comme $[a,b]$ est un intervalle fermé borné (ie. un *compact* de $\mathbb{R}$), par le théorème de Borel-Lebesgue un nombre fini d'intervalles I_x suffit pour recouvrir $[a,b]$. C'est-à-dire qu'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{M-1} < x_M = b$ telle que $[a,b] = \cup_{k=0}^M I_{x_k}$. On définit alors Φ en posant $\Phi(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots M\}$, et pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $k \in \{0, 1, \ldots M - 1\}$,

$$\Phi(x) = \left(\sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t) + \inf_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t) \right) /2.$$

Montrons que $||f - \Phi|| < \epsilon$. Pour cela, faisons deux observations préalables. Notons d'abord que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots M - 1\}$ les intervalles I_{x_k} et $I_{x_{k+1}}$ recouvrent $[x_k, x_{k+1}]$. En effet, comme

$$[a,b] = \cup_{k=0}^M I_{x_k}, \tag{2.3}$$

pour tout point $x \in]x_k, x_{k+1}[$ il existe $l \in \{0, 1, \ldots M\}$ tel que $x \in I_{x_l}$. Si $x_l \leq x_k$, alors $x \in I_{x_k}$, par définition de l'oscillation de f sur les intervalles I_{x_l} et I_{x_k} ; de même $x \in I_{x_{k+1}}$ si $x_l \geq x_{k+1}$. Ceci montre bien que $(I_{x_k} \cup I_{x_{k+1}}) \cap [x_k, x_{k+1}] = [x_k, x_{k+1}]$. D'autre part, cette observation implique

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t) &= \max \left(\sup_{t \in I_{x_k} \cap [x_k, x_{k+1}]} f(t), \sup_{t \in I_{x_{k+1}} \cap [x_k, x_{k+1}]} f(t) \right) \\ &\leq \max \left(\sup_{t \in I_{x_k}} f(t), \sup_{t \in I_{x_{k+1}}} f(t) \right) \end{aligned}$$

et

$$\inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t) \geq \min\left(\inf_{t\in I_{x_k}} f(t), \inf_{t\in I_{x_{k+1}}} f(t)\right).$$

Maintenant on peut majorer tranquillement : pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-\Phi(x)| &= \left|\frac{1}{2}\left(f(x)-\sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\right)+\frac{1}{2}\left(f(x)-\inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|f(x)-\sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\right|+\frac{1}{2}\left|f(x)-\inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)-f(x)\right)+\frac{1}{2}\left(f(x)-\inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\max\left(\sup_{t\in I_{x_k}} f(t), \sup_{t\in I_{x_{k+1}}} f(t)\right)-f(x)\right) \\
&\qquad +\frac{1}{2}\left(f(x)-\min\left(\inf_{t\in I_{x_k}} f(t), \inf_{t\in I_{x_{k+1}}} f(t)\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\max(o(I_{x_k}), o(I_{x_{k+1}}))+\frac{1}{2}\max(o(I_{x_k}), o(I_{x_{k+1}})) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\Phi(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots M\}$, ceci prouve qu'on a bien l'inégalité

$$||f-\Phi|| < \epsilon.$$

Enfin, levons la condition $o(x) < \epsilon/16$ pour tout $x \in [a, b]$, que nous avions posée en haut de la page précédente. Nous savons que $A_{\epsilon/16}$ est un ensemble fini (Lemme 2.7.3 (a)), donc $\{a, b\} \cup A_{\epsilon/16} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ avec $y_j < y_{j+1}$ pour tout $j = 1, ..., k-1$. On peut alors poser $\Phi(y_j) = f(y_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$ et définir Φ comme dans le paragraphe précédent sur chaque intervalle $]y_j, y_{j+1}[$, où l'on sait que tout x vérifie $o(x) < \epsilon/16$. □

Remarque 2.7.7 (1) Le théorème montre qu'il existe des fonctions qui ne sont pas réglées. Par exemple, la fonction indicatrice des nombres rationnels dans un segment, $\chi_{\mathbb{Q}}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$, n'admet de limite en aucun point. Un autre exemple : soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. La restriction de f à $[-1, 1]$ n'est pas réglée parce que f n'admet pas de limite à droite en 0. Toutefois, f est intégrable sur $[-1, 1]$, puisque pour tout $0 < \varepsilon < 1$ elle est continue sur $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$ et $|f|$ est borné (≤ 1) sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, donc on peut coincer f entre deux fonctions en escalier d'intégrales arbitrairement proches sur $[-1, 1]$.

(2) D'après (2.3) on voit que $o([a, b])$ est fini, et donc $o(U)$ est également fini pour toute partie U de $[a, b]$; notons que cela résulte de la compacité de $[a, b]$ (f n'étant pas nécessairement continue on ne peut pas déduire qu'elle est bornée sur $[a, b]$).

Voici une conséquence du théorème tout bonnement remarquable :

Corollaire 2.7.8 *Toute fonction monotone sur un segment est intégrable.*

Preuve. Nous avons vu dans l'exemple 2.7.4 que les fonctions monotones sur un segment admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point du segment. D'après le théorème ce sont des fonctions réglées. Les fonctions en escalier étant intégrables, le théorème 2.3.3 (b) conclut. □

2.8 Le théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 2.8.1 (Stone-Weierstrass) *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales sur $[a,b]$. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|P(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tous $x \in [a,b]$.*

Ce résultat fondamental sera généralisé en L3 Maths (dans l'UE de Topologie) dans le cadre des fonctions continues sur un espace métrique compact. La preuve que nous donnons ici, élémentaire, est aussi constructive : elle fournit une suite explicite de polynômes.

Preuve. Commençons par montrer qu'il suffit de prouver le résultat lorsque $[a,b] = [0,1]$. Considérons l'application affine $u\colon [0,1] \to [a,b]$, $t \mapsto a + t(b-a)$. Elle est bijective, et a pour réciproque l'application $v : x \mapsto (x-a)/(b-a)$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f \circ u$, définie sur $[0,1]$, l'est aussi. Si le théorème est vrai sur le segment $[0,1]$, alors il existe une suite (P_n) de polynômes qui tend uniformément vers $f \circ u$; étant donné $\epsilon > 0$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $||f \circ u - P_n||_{[0,1]} < \epsilon$. Puisque $f = (f \circ u) \circ v$ avec v bijective, ceci implique que pour $n \geq N$ on a $||f - P_n \circ v||_{[a,b]} < \epsilon$, soit que $P_n \circ v$ tend uniformément vers f. Mais v étant affine, $P_n \circ v$ est un polynôme. Ainsi, la suite polynômiale $(P_n \circ v)$ tend uniformément vers f.

Montrons maintenant le théorème lorsque $[a,b] = [0,1]$. Soit donc $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, et définissons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction polynômiale $B_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ (qui dépend de f) :

$$B_n(t) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

Les polynômes $C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$ sont appelés *polynômes de Bernstein* (cf. article wikipedia https ://fr.wikipedia.org/wiki/Polynômes_de_Bernstein). Montrons que f est la limite uniforme de la suite (B_n). Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.8.2 *Pour tout $t \in [0,1]$ on a*

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = 1$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} (t - \frac{k}{n})^2 C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \frac{1}{n} t(1-t) \leq \frac{1}{n}$.

Preuve du lemme. (a) Il suffit d'écrire $(t + (1-t))^n = 1$ et d'appliquer le binôme de Newton.

(b) On écrit $(t-\frac{k}{n})^2 = t^2 - 2\frac{k}{n}t + (\frac{k}{n})^2$, et on calcule :

$$t^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = t^2$$
$$t \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = t \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} t^k (1-t)^{n-k} = t^2$$

d'après (a) et en réindexant, et

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\qquad = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\qquad = \frac{1}{n^2} \left(n(n-1) \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} t^k (1-t)^{n-k} + n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \right) \\
&\qquad = \frac{1}{n^2} \big(n(n-1)t^2 + nt \big) = t^2 + \frac{1}{n}(t-t^2).
\end{aligned}$$

Puisque $t^2 - 2t^2 + t^2 + \frac{1}{n}(t-t^2) = \frac{1}{n}t(1-t)$, ceci prouve l'égalité dans (b). L'inégalité $t(1-t) \leq 1$ est évidente, puisque le produit de deux nombres positifs inférieurs à 1 est inférieur à 1. □

Suite de la preuve du théorème. D'après le (a) du lemme on a

$$f(t) - B_n(t) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(\frac{k}{n})) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}. \tag{2.4}$$

Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Fixons $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$A_n := \{k \in \{0,1,\ldots,n\}, |\tfrac{k}{n} - t| < \eta\}.$$

Notons que A_n dépend de t, mais que celui-ci a été fixé préalablement. Dans l'identité (2.4) ci-dessus, décomposons la somme selon que $k \in A_n$ ou $k \notin A_n$. D'abord on a

$$\begin{aligned}
\big|\textstyle\sum_{k\in A_n} (f(t) - f(\frac{k}{n})) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\big| &\leq \sum_{k\in A_n} \left| f(t) - f(\frac{k}{n}) \right| C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&< \epsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ou la dernière inégalité vient du fait que $k \in A_n$ et du choix de η, et l'égalité vient du

(a) du lemme. De plus

$$\begin{aligned}
&\Big|\textstyle\sum_{k\in\{0,\dots,n\}\setminus A_n}(f(t)- f(\frac{k}{n}))C_n^k t^k(1-t)^{n-k}\Big| \\
&\qquad\le \sum_{k\in\{0,\dots,n\}\setminus A_n} \underbrace{\left|f(t)-f(\frac{k}{n})\right|}_{\le 2||f||} C_n^k t^k(1-t)^{n-k} \\
&\qquad\le 2||f|| \sum_{k\in\{0,\dots,n\}\setminus A_n} C_n^k t^k(1-t)^{n-k} \\
&\qquad\le 2||f|| \sum_{k\in\{0,\dots,n\}\setminus A_n} \frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\eta^2} C_n^k t^k(1-t)^{n-k} \le \frac{2||f||}{\eta^2 n}
\end{aligned}$$

où pour l'avant-dernière inégalité on a utilisé le fait que $\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\eta^2} \ge 1$ dès que $k \notin A_n$, et la dernière inégalité vient du (b) du lemme. Ces majorations des sommes sur A_n et sur $\{0,\dots,n\} \setminus A_n$ (qui dépendent de t !) sont valides pour tout $t \in [0,1]$, donc on obtient la majoration

$$||f - B_n|| \le \epsilon + \tfrac{2||f||}{\eta^2 n}.$$

Puisque $\eta > 0$ ne dépend que de f, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2||f||}{\eta^2 N} < \epsilon$. Alors pour tout $n \ge N$ on a $||f - B_n|| < 2\epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ a été choisi de manière arbitraire, il s'ensuit que la suite (B_n) converge uniformément vers f. □

Exemple 2.8.3 Prenons pour f la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$. Définissons une suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$ et

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2(X)).$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le P_n(t) \le P_{n+1}(t) \le |t|$ pour tout $t \in [-1,1]$, et en déduire que (P_n) converge simplement vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$. Par le théorème de Dini 2.6.1 (a), comme la suite est croissante, la convergence est uniforme.

Exemple 2.8.4 (Une application importante : les moments de f) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$m_n(f) = \int_a^b f(t)t^n dt.$$

On appelle $m_n(f)$ le *moment* d'ordre n de f. Les moments de f contiennent beaucoup d'informations sur les propriétés de f (voir par exemple l'article Wikipedia : https ://fr.wikipedia.org/ wiki/Moment_(probabilités)). Montrons par exemple que si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^n dt = 0 \qquad (2.5)$$

alors f est la fonction nulle. En effet, (2.5) implique que pour toute toute fonction polynômiale $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ on a $\int_a^b f(t)P(t)dt = \sum_{i=0}^{d} a_i \int_a^b f(t)t^i dt = 0$. Alors si g est une fonction réelle continue sur $[a,b]$, et (P_n) est une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$ (cette suite existe par Stone-Weierstrass), alors fP_n converge uniformément vers fg, car f est bornée sur $[a,b]$ (cf feuille TD1, exercice 4). On déduit alors du théorème 2.3.3 (b) que $\int_a^b f(t)g(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$. Pour $g = f$ on obtient $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Puisque f^2 est une fonction continue et positive, il s'ensuit que c'est la fonction nulle. Donc f est nulle.

Ce fait d'apparence seulement technique peut s'interpréter de la manière suivante. D'abord, considérons l'application

$$m\colon \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ f \mapsto (m_n(f))_n.$$

Cette application est évidemment linéaire. Nous venons de montrer que $m(f) = 0$ implique $f = 0$, donc m est injective.

D'autre part, soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt. \end{array}$$

où $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a,b]$. L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire, symétrique, et définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Le sous-espace $\mathbb{R}[X]_{[a,b]} \subset \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ formé par les fonctions polynômiales sur $[a,b]$ a pour base les fonctions monômiales $t \mapsto t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors le fait ci-dessus montre que l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]_{[a,b]}$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est réduit à la fonction nulle.

Chapitre 3

Séries de fonctions réelles

Soit $(f_n) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur un ensemble non vide I.

Définition 3.0.1 *On appelle série de terme général f_n, et on note $\sum f_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, la suite de fonctions (g_n), où $g_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. On appelle g_n la n-ième somme partielle de la série. Lorsque la suite (g_n) converge simplement, on appelle sa limite la somme de la série $\sum f_n$.*

En accord avec cette définition, on transfère nominativement à $\sum f_n$ les propriétés de (g_n). Ainsi, on dit que $\sum f_n$ converge simplement (ou uniformément, ou uniformément sur les compacts) si la suite (g_n) converge simplement (ou uniformément, ou uniformément sur les compacts). Et la série $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si la suite (g_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme ; cela s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Rightarrow || \textstyle\sum_{k=n+1}^{m} f_k|| < \epsilon.$$

Lorsque $\sum f_n$ converge simplement, sa limite f, qui est définie par $f := \lim_{n\to+\infty} g_n$, vérifie bien entendu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Les résultats du chapitre 2 ont des conséquences immédiates pour les séries de fonctions. On décrit ces conséquences dans la section 3.1. La section 3.2 décrit trois méthodes spécifiques aux séries pour démontrer la convergence uniforme.

On utilisera souvent les critères de convergence des séries **numériques** vus en L1, notamment :

— le critère de Riemann,

— le théorème des gendarmes pour les séries numériques,

— deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant sont de même nature,

— le critère spécial des séries alternées.

Rappel : C'est un exercice classique, que vous avez certainement déjà rencontré, de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{ln(n)}$ converge, et que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$ diverge. Leurs termes généraux sont bien équivalents, mais pas de signes constants.

3.1 Théorèmes d'interversion

Soit $\sum f_n$ une série de terme général f_n, où les fonctions f_n sont définies sur un intervalle I. En appliquant les théorèmes 2.3.3 et 2.5.1 aux suite de sommes partielles (g_n), on obtient immédiatement :

Théorème 3.1.1 *(a) Si toutes les fonctions f_n sont continues et la série $\sum f_n$ converge uniformément ou uniformément sur les compacts, alors sa somme est une fonction continue sur I.*

(b) Si $[a,b]$, $a < b$, est un intervalle inclus dans I, toutes les fonctions f_n sont intégrables sur $[a,b]$, et la série $\sum f_n$ converge uniformément, alors sa somme f est intégrable sur $[a,b]$, et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

(c) Si I est ouvert, toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur les compacts, et la série $\sum f_n$ converge simplement en au moins un point $x_0 \in I$, alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur les compacts, sa somme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée f' est la somme de $\sum f_n'$.

3.2 Convergence normale, Abel et Cauchy U

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions réelles.

Définition 3.2.1 *On dit que $\sum f_n$ converge normalement si à partir d'un certain rang N toutes les fonctions f_n sont bornées et la série réelle $\sum_{n=N}^{\infty} ||f_n||$ converge.*

Dans la suite, pour simplifier les notations on supposera que toutes les fonctions f_n sont bornées (donc $N = 0$ ci-dessus). On a :

Théorème 3.2.2 *Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément.*

(*) *Preuve.* Soit $\epsilon > 0$. Si la série $\sum f_n$ converge normalement, par le critère de Cauchy pour la série numérique $\sum ||f_n||$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq N$ on a $\sum_{k=n+1}^m ||f_k|| < \epsilon$. Alors par l'inégalité triangulaire il vient

$$||g_m - g_n|| = || \textstyle\sum_{k=n+1}^m f_k|| \leq \sum_{k=n+1}^m ||f_k|| < \epsilon$$

où comme d'habitude g_m désigne la m-ième somme partielle de la série $\sum f_n$. Cela montre que cette série vérifie le critère de Cauchy uniforme. Elle est donc uniformément convergente. $\square$

Attention, la réciproque est fausse en générale (voir l'exemple 3.2.5 (1)) !

Prouver la convergence normale est en pratique la méthode la plus utilisée pour démontrer la convergence uniforme des séries de fonctions, car $\sum_{n=N}^{\infty} ||f_n||$ est une série *numérique*, qu'on peut étudier à l'aide des critères vus en L1.

Exemple 3.2.3

1. Soit $a \in [0, +\infty[$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/(n!)$ converge normalement sur $[-a, a]$, car $\sup_{[-a,a]} |x^n/(n!)| = a^n/(n!)$ et la série réelle $\sum a^n/(n!)$ converge (eg. par critère de D'Alembert).
2. Soit $a \in [0, 1[$. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n/n$ converge normalement sur le segment $[-a, a]$, car $\sup_{[-a,a]} |x^n/n| = a^n/n$, et la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n$ converge (car $\leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n = 1/(1-a)$).
3. Étudions la convergence de la série $\sum n^{-\alpha}x^2e^{-nx^2}$, où $\alpha > 0$. Regardons le terme général de la série, $f_n(x) = n^{-\alpha}x^2e^{-nx^2}$. Le terme en "$x^2$" l'écrase en 0, et le terme en "e^{-nx^2}" l'écrase en $\pm\infty$. Il est donc vraisemblable qu'on ait convergence normale sur $\mathbb{R}$. On étudie la fonction f_n, en n fixé. On a $f_n'(x) = n^{-\alpha}2xe^{-nx^2}(1 - nx^2)$, et le tableau de variation de f_n montre que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = 1/en^{\alpha+1}.$$

   Voir l'exemple 3.2.8 plus bas pour une étude d'une série plus compliquée, sans convergence normale.

Un autre critère très utile en pratique pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions réelles est la règle d'Abel uniforme, qui généralise la règle d'Abel pour les séries réelles :

Théorème 3.2.4 (Règle d'Abel uniforme) *Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions réelles définies sur un ensemble I. On suppose que pour tout $x \in I$ la suite réelle $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante, et que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'application nulle. On suppose également qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sup_{x\in I} |\sum_{k=0}^{n} h_k(x)| \leq M. \tag{3.1}$$

Alors la série de terme général $f_n := g_nh_n$ converge uniformément.

Ce critère s'applique en particulier dans des situations où l'on n'a pas convergence normale.

Noter que la condition (3.1) signifie que les fonctions $\sum_{k=0}^{n} h_k$ sont *uniformément bornées*, ie. majorées en valeur absolue par une constante *indépendante de $x \in I$ et*

$n \in \mathbb{N}$. Il faut bien prendre garde à ne pas confondre cette propriété avec une quelconque forme de convergence : typiquement, les fonctions $\sum_{k=0}^{n} h_k$ peuvent osciller entre des valeurs négatives et positives non proches de 0 (prendre par exemple le cas où h_k est constante égale à $(-1)^k$).

Exemple 3.2.5 1. D'après le théorème la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n/n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$ (prendre $g_n(x) = x^n/n$ et $h_n(x) = (-1)^n$). Par rapport à l'exemple 3.2.3 (2), la régle d'Abel nous fait gagner ici la convergence (simple !) au point $x = 1$. Noter que la série ne converge pas normalement sur $I = [0,1]$, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

2. Soit (c_n) une suite réelle décroissante et de limite nulle. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx)$ converge uniformément sur les compacts de $]0,\pi[$. En effet, la règle d'Abel s'applique avec $g_n(x) = c_n$ et $h_n(x) = \cos(nx)$, en notant que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \cdot \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\right) \\
&= \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \cos(nx/2).
\end{aligned}$$

Puisque sin est croissante sur $[0,\pi/2]$ on a $\sin(x/2) \geq \sin(a/2)$ pour tout $x \in [a,b] \subset]0,\pi[$, et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}.$$

On obtient ainsi (3.1) avec $M = 1/\sin(a/2)$. Noter que ce majorant tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0 ; en fait, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx)$ peut ne pas converger en 0 (eg. c'est le cas si $c_n = 1/n$) ou en π.

3. Par les mêmes arguments on obtient que pour tout $x \in [a,b] \subset]0,2\pi[$ et tout entier n on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right| \leq \frac{1}{\min(\sin(a/2), \sin(b/2))}$$

et le même majorant vaut pour $|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)|$ (en remplaçant Re par Im dans le calcul).

4. Posons $f_n(x) = (-1)^n/(n+x)$, $x \in]0,+\infty[$. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur l'intervalle $]0,+\infty[$, d'après la règle d'Abel (prendre $g_n(x) = 1/(n+x)$). Elle ne converge pas normalement, car $||f_n|| = 1/n$. Pour tout $k \geq 1$ entier la série des dérivées k-ièmes $\sum f_n^{(k)}$ converge aussi uniformément, et même normalement, puisque $||f_n^{(k)}|| \leq k! n^{-(k+1)}$ et la série $\sum n^{-(k+1)}$ converge par critère de

Riemann (on a supposé $k \geq 1$). Alors le théorème 3.1.1 implique que la somme f de $\sum f_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Remarque 3.2.6 On peut parfois mener une étude détaillée de la fonction somme d'une série uniformément convergente $\sum f_n$. Ainsi, dans l'exemple 3.2.5 (4) ci-dessus, en regroupant les termes deux à deux on voit très facilement que f est positive, et de même que f' est négative et donc f est décroissante. De plus, notons g_N la N-ième somme partielle de la série $\sum f_n$. On peut remarquer que, par télescopage de termes successifs, la N-ième somme partielle de $f(x+1) + f(x)$ est égale à

$$g_N(x+1) + g_N(x) = \frac{1}{x} + \frac{(-1)^N}{N+1+x}.$$

Donc

$$f(x) + f(x+1) = \lim_{N\to+\infty} (g_N(x+1) + g_N(x)) = 1/x.$$

On sait que $f(1) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}/n = \ln(2)$ (voir cours d'intégration au premier semestre ; alternativement, on peut utiliser le théorème de convergence radial d'Abel pour les séries entières, cf feuille de TD3). Comme f est continue, $\lim_{x\to0^+} xf(x+1) = (\lim_{x\to0^+} x)f(1) = 0$, et alors $\lim_{x\to0^+} x(f(x)+f(x+1)) = 1$ implique $\lim_{x\to0^+} xf(x) = 1$, soit $f(x) \sim_{0^+} 1/x$. Enfin, l'identité $f(x) + f(x+1) = 1/x$ et l'encadrement (f est décroissante)

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$$

impliquent $1 \leq 2xf(x)$, d'où $1/2 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$. De même $2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$ implique $2xf(x) \leq x/(x-1)$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) \leq 1/2$. En conclusion, on a démontré que $f(x) \sim_{+\infty} 1/2x$.

Preuve du théorème 3.2.4. Montrons que la série $\sum g_n h_n$ vérifie la condition de Cauchy uniforme. Soit $\epsilon > 0$. On doit montrer que $|\sum_{k=m}^n g_k(x)h_k(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in I$ et tous $n \geq m$ assez grands. Pour cela, on réécrit la somme $\sum_{k=m}^n g_k h_k$ de la manière suivante (on appelle parfois cette réécriture la sommation par parties, ou *transformation d'Abel* - cf l'article Wikipedia éponyme) :

$$\sum_{k=m}^n g_k h_k = (g_m - g_{m+1})h_m + (g_{m+1} - g_{m+2})(h_m + h_{m+1}) + (g_{m+2} - g_{m+3})(h_m + h_{m+1} + h_{m+2})$$
$$+ \ldots + (g_{n-1} - g_n)(h_m + h_{m+1} + \ldots + h_{n-1}) + g_n(h_m + h_{m+1} + h_{m+2} + \ldots + h_n).$$

(Noter les télescopages des termes successifs dans le membre de droite !). Puisqu'en tout point $x \in I$ la suite $(g_k(x))_k$ est décroissante, toutes les fonctions $g_k - g_{k+1}$ sont positives. On sait aussi que g_n est positive, donc en appliquant l'inégalité triangulaire au membre de droite on trouve

$$\left|\sum_{k=m}^n g_k h_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) \left|\sum_{i=m}^k h_i\right| + g_n \left|\sum_{i=m}^n h_i\right|.$$

Maintenant, pour tout $k \geq m$ on a $\sum_{i=m}^{k} h_i = \sum_{i=0}^{k} h_i - \sum_{i=0}^{m-1} h_i$, donc $\left|\sum_{i=m}^{k} h_i\right| \leq 2M$ par l'inégalité triangulaire et l'hypothèse (3.1). Alors

$$\left|\sum_{k=m}^{n} g_k h_k\right| \leq 2M \sum_{k=m}^{n-1}(g_k - g_{k+1}) + 2M g_n \leq 2M g_m \leq 2M||g_m||.$$

La deuxième inégalité vient du télescopage des termes de la somme. Puisque (g_n) converge uniformément vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq N$ implique $||g_m|| < \epsilon$, et donc $|\sum_{k=m}^{n} g_k h_k| < \epsilon$, ce qu'il fallait démontrer. □

En dernier ressort, pour vérifier si une série qui converge simplement converge uniformément, il peut s'avérer crucial d'utiliser le critère de Cauchy uniforme (cf; exemple ci-dessous). La Proposition 2.1.6 et la terminologie introduite au début de ce chapitre impliquent immédiatement :

Proposition 3.2.7 *$\sum f_n$ converge uniformément si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme, ie. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > n \geq N$ et tout $x \in I$ on a*

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| < \epsilon.$$

De manière équivalente, $\sum f_n$ converge uniformément si, et seulement si, la suite des restes (R_n), où $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$, converge uniformément vers 0.

Exemple 3.2.8 (**Étude de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$**) On veut déterminer le domaine de convergence simple et uniforme de cette série, pour en déduire si sa somme définit une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, voire même trouver une formule "compacte" de cette fonction (si possible).

D'abord on note que la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ ne peut converger que si $x > 0$ (elle diverge grossièrement sinon). De plus, pour tout $x > 0$, $ne^{-nx} = o_{n\to+\infty}(n^{-2})$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ converge par critère de Riemann, donc par comparaison de séries à termes positifs il vient que la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ converge pour tout $x > 0$. Notons sa somme

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}. \end{array}$$

Au vu du terme général de la série on devine un problème de convergence uniforme au voisinage de 0. En effet, si g_N désigne la N-ième somme partielle de la série, on a $g_{N+1}(x) - g_N(x) = (N+1)e^{-(N+1)x}$. Alors si on prend x suffisamment proche de 0, par exemple $x = 1/(N+1)$, on obtient $g_{N+1}(x) - g_N(x) \geq (N+1)e^{-1}$, et donc $||g_{N+1} - g_N||_{]0,+\infty[} \geq (N+1)e^{-1}$. Cela montre qu'il existe $\epsilon > 0$, par exemple $\epsilon = 1$, tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $m, n \geq N$ tels que $||g_{N+1} - g_N||_{]0,+\infty[} \geq \epsilon$. Ceci contredit la convergence uniforme.

Cependant, pour obtenir la continuité de f il suffit de vérifier qu'on a convergence uniforme sur les compacts de $]0,+\infty[$. Or pour tout $a > 0$ on a $||ne^{-nx}||_{x\in[a,+\infty[} = ne^{-na}$, et la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-na}$ converge (voir plus haut). Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$

converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, et a fortiori sur les compacts de $]0, +\infty[$. D'après le théorème 3.1.1 (a), il s'ensuit que f est continue.

Le même argument montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la série des dérivées k-ièmes, $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$, converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$ (et ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$). D'après le théorème 3.1.1 (c), f est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de la limite double (théorème 2.3.2), la convergence uniforme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ au voisinage de $+\infty$ implique

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} \left(ne^{-nx}\right) = 0.$$

Enfin, les fonctions $f_n \colon x \mapsto ne^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, sont toutes intégrables sur les segments de $]0, +\infty[$. La convergence étant uniforme sur les compacts, on déduit du théorème 3.1.1 (b) que pour tous $0 < x_0 < x$,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-nx} + e^{-nx_0}) = -\frac{1}{1 - e^{-x}} + \frac{1}{1 - e^{-x_0}}.$$

Noter que pour tout $x > 0$ on a $0 < e^{-x} < 1$, ce qui permet le calcul des séries géométriques dans la dernière égalité. En dérivant, on obtient donc

$$\forall x > 0,\ f(x) = \left(-\frac{1}{1 - e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

3.3 Des fonctions continues nulle part dérivables !

Nous terminons ce chapitre par un exemple, peut-être le plus simple, de fonction continue qui n'est dérivable en aucun point, la fonction T de Takagi. Ells est définie de la manière suivante. Soit $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction distance à l'entier le plus proche :

$$\phi(x) := \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|.$$

Posons $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = 2^{-n}\phi(2^n x)$, et

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Lemme 3.3.1 *La fonction ϕ est continue.*

(*) *Preuve.* Soit $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ dès que y est suffisament proche de x. On va montrer une propriété plus forte, à savoir : (*) $|\phi(x) - \phi(y)| \le |x - y|$ (ϕ est donc 1-Lipschitzienne). En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $|x - n| \le |x - y| + |y - n|$, donc $\phi(x) \le |x - y| + |y - n|$, *et ensuite* $\phi(x) \le |x - y| + \phi(y)$, en prenant l'inf sur les entiers à gauche *puis* à droite de l'inégalité.

De même, en majorant $|y-n|$ on trouve $\phi(y) \leq |x-y| + \phi(x)$. Les deux inégalités montrent bien (*). $\square$

Le lemme implique que chaque fonction f_n est également continue. Puisque $||f_n|| \leq 2^{-n}$, il s'ensuit que la série $\sum f_n$ converge normalement. d'après le théorème 3.2.2, on a donc :

Lemme 3.3.2 *La série T définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

Nous allons montrer :

Proposition 3.3.3 *La fonction T n'est dérivable en aucun point.*

Remarque 3.3.4 C'est un bon exercice de se faire une idée de ce à quoi peut ressembler le graphe de T. En dépit de la proposition 3.3.3, la fonction T vérifie de belles propriétés : on montre sans difficultés qu'elle est périodique de période 1, telle que $T(x) = T(1-x)$, et de plus $T(x) = T(2x)+\phi(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$. Il n'est pas difficile de montrer que $\int_0^1 \phi(x)dx = 1/4$. Alors de tout ceci on peut déduire $\int_0^1 T(x)dx = 1/2$ (exercice !).

Pour contredire la dérivabilité d'une fonction en un point, le critère suivant s'avère commode :

Lemme 3.3.5 *Soit $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in]a,b[$. Supposons que f est dérivable en x_0. Alors, si (a_n) est une suite dans $]a,x_0]$ de limite x_0, et (b_n) une suite dans $[x_0,b[$ de limite x_0, telles que $b_n \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x_0). \tag{3.2}$$

(*) *Preuve.* Puisque f est dérivable en x_0 on peut y écrire son développement de Taylor à l'ordre 1 : on a $f(a_n) = f(x_0) + f'(x_0)(a_n - x_0) + o(a_n - x_0)$ et $f(b_n) = f(x_0) + f'(x_0)(b_n - x_0) + o(b_n - x_0)$, où $\lim_{n\to+\infty} \frac{o(a_n-x_0)}{a_n-x_0} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(b_n-x_0)}{b_n-x_0}$. Alors

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x_0) + \frac{o(b_n-x_0)}{b_n-a_n} - \frac{o(a_n-x_0)}{b_n-a_n}.$$

Maintenant $0 \leq b_n - x_0 \leq b_n - a_n$ donne $|\frac{o(b_n-x_0)}{b_n-a_n}| \leq |\frac{o(b_n-x_0)}{b_n-x_0}|$, donc $\lim_{n\to+\infty} |\frac{o(b_n-x_0)}{b_n-a_n}| = 0$. De même $0 \leq a_n - x_0 \leq b_n - a_n$ implique $\lim_{n\to+\infty} |\frac{o(a_n-x_0)}{b_n-a_n}| = 0$. Ces deux limites prouvent bien (3.2). $\square$

Preuve de la proposition 3.3.3. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que T n'est pas dérivable en x_0 en utilisant le lemme. Étant donné un entier naturel n, il existe un unique entier j_n tel que $j_n \leq 2^n x_0 \leq j_n + 1$ (si $x_0 \geq 0$, $j_n = E(2^n x_0)$, et si $x_0 \leq 0$, $j_n = E(2^n x_0) - 1$). Supposons par exemple que $x_0 \geq 0$ (la preuve est analogue pour $x_0 < 0$). Posons

$$a_n := \frac{j_n}{2^n}\ ,\ b_n := \frac{j_n+1}{2^n}.$$

On a bien entendu $a_n \leq x_0 \leq b_n$, et $b_n - a_n = 1/2^n \to 0$, $n \to +\infty$. On va montrer que $\frac{T(b_n)-T(a_n)}{b_n-a_n}$ $(= 2^n(T(b_n) - T(a_n)))$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Pour calculer $T(b_n) - T(a_n)$ on considère l'écriture de l'entier j_n en base 2, c'est-à-dire l'unique expression de j_n comme une somme finie de puissances 2^k, $k \in \mathbb{N}$, à coefficients dans $\{0,1\}$ (je n'écris pas cette expression pour ne pas introduire/alourdir de nouvelles notations...). Grâce à cette expression on peut écrire

$$a_n = E(a_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \tag{3.3}$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$. Notons que la somme ci-dessus s'arrête à l'indice $k = n$, car $2^n a_n$ est entier. De plus, pour tout $m \geq n$, $2^m a_n$ et $2^m b_n$ sont des entiers, donc $\phi(2^m a_n) = \phi(2^m b_n) = 0$, puis $f_n(2^m a_n) = f_n(2^m b_n) = 0$. Alors

$$\frac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n} = 2^n(T(b_n) - T(a_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}(\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n)). \tag{3.4}$$

Calculons la différence $\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n)$ pour chaque entier k entre 0 et $n-1$. Comme la fonction ϕ s'annule sur les entiers, il suffit de calculer sa valeur sur $2^k b_n$ et $2^k a_n$ modulo $\mathbb{Z}$. Or (3.3) implique

$$\begin{aligned} 2^k a_n &\equiv \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} && \mod(\mathbb{Z}) \\ 2^k b_n &\equiv \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} + \frac{1}{2^{n-k}} && \mod(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

La fonction ϕ évaluée au point $2^k a_n$, par exemple, est égale à la distance entre le membre de droite et l'entier le plus proche ; donc il faut l'encadrer, entre 0 et $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2}$ et 1 ; dans le premier cas $\phi(2^k a_n)$ sera égale au membre de droite, et dans le second cas $\phi(2^k a_n)$ sera égale à 1 moins cette expression. On scinde ce problème d'encadrement selon la valeur de ε_{k+1}. Si $\varepsilon_{k+1} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} &\leq \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-k}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-k}}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} \in [0, \frac{1}{2}[$ et $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} + \frac{1}{2^{n-k}} \in]0, \frac{1}{2}]$, d'où

$$\begin{aligned} \phi(2^k a_n) &= \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} \\ \phi(2^k b_n) &= \frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} + \frac{1}{2^{n-k}} \end{aligned}$$

et finalement $\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n) = \frac{1}{2^{n-k}}$. Si $\varepsilon_{k+1} = 1$, on ajoute $\frac{1}{2}$ au calcul ci-dessus de $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}}$, donc $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} \in [\frac{1}{2}, 1[$, $\frac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} + \frac{1}{2^{n-k}} \in]\frac{1}{2}, 1]$, et finalement

$$\begin{aligned}\phi(2^k b_n) - \phi(2^k a_n) &= (1 - (\tfrac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \tfrac{\varepsilon_n}{2^{n-k}})) - (1 - (\tfrac{\varepsilon_{k+1}}{2} + \ldots + \tfrac{\varepsilon_n}{2^{n-k}} + \tfrac{1}{2^{n-k}})) \\ &= -\frac{1}{2^{n-k}}.\end{aligned}$$

On déduit de ces calculs que l'expression (3.4) devient $\frac{T(b_n)-T(a_n)}{b_n-a_n} = p - q = n - 2q$, où p est le nombre de coefficients ε_k égaux à 0 dans l'écriture (3.3), et q est le nombre de ces coefficients qui sont égaux à 1. C'est donc un entier pair si n est pair, et impair si n est impair. Il ne peut avoir de limite quand $n \to +\infty$, donc le lemme 3.3.5 implique que T n'est pas dérivable en x_0. $\square$

La fonction de Takagi T peut paraître "pathologique", mais les fonctions continues et nulle part dérivables ne sont pas rares. En fait, on peut montrer au niveau L3 que ces fonctions forment un sous-ensemble "dense" (plus précisément, de complémentaire maigre) de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie définie par la norme de la convergence uniforme ! D'autres exemples célèbres de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivables sont les fonctions de Weierstrass, de la forme

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

où $0 < a < 1$ et $ab \geq 1$. À ce sujet je conseille la lecture des articles Wikipedia sur les fonctions de Weierstrass et les fonctions continues nulle part dérivables.

Chapitre 4

Séries entières réelles

Définition 4.0.1 *Une série entière est une série de fonctions* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *où* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, est de la forme* $f_n(x) = a_n x^n$ *pour un* $a_n \in \mathbb{R}$*.*

On notera souvent $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Une série entière $\sum a_n x^n$ est une sorte de “polynôme infini”, qui en tant que fonction possède un certain domaine de définition (”ventuellement vide !), ie. le lieu en tout point duquel la série converge. On peut toujours l'identifier avec la suite (a_n) de ses coefficients (comme tout polynôme). Elle peut être définie par une suite (a_n) lacunaire, ie. ayant des termes nuls. Par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ est définie par la suite (a_n) telle que $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ sinon.

Par analogie avec l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on note $\mathbb{R}[[X]]$ l'ensemble des séries entières réelles *considérées formellement*, c'est-à-dire en négligeant toute question d'évaluation en les points $x \in \mathbb{R}$, ie. en négligeant les problèmes de convergence. On appelle ses éléments les *séries formelles*, et on les note $\sum a_n X^n$ plutôt que $\sum a_n x^n$. Toujours comme pour les polynômes, on peut munir l'ensemble $\mathbb{R}[[X]]$ des opérations suivantes. Soient $A = \sum a_n x_n$ et $B = \sum b_n x^n$ deux séries formelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- la somme $A + B$ est la série $\sum c_n X^n$, où $c_n = a_n + b_n$;
- la produit AB est la série $\sum d_n X^n$, où $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (noter que $AB = BA$!) ;
- le multiple λA est la série $\sum e_n X^n$, où $e_n = \lambda a_n$;
- la série dérivée A' est $\sum (n+1) a_{n+1} X^n$.

Les opérations ci-dessus munissent $\mathbb{R}[[X]]$ d'une structure structure d'anneau, qui sera étudiée dans l'UE “Groupes et Anneaux II” en L3. Dans ce cours nous nous contenterons d'utiliser le fait suivant :

Théorème 4.0.2 *Une série formelle* $\sum a_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ *est inversible si, et seulement si,* $a_0 \neq 0$*.*

(*) *Preuve.* Si $T = \sum a_n X^n$ est inversible, son inverse $S = \sum b_n X^n$ vérifie $ST = \sum d_n X^n = 1$ (où les coefficients d_n sont définis ci-dessus), et donc $d_0 = a_0 b_0 = 1$. Ceci montre que a_0 est non nul. Réciproquement, supposons $a_0 \neq 0$. Une série $S = \sum b_n X^n$ est l'inverse de T si et seulement si $ST = 1$, ce qui se traduit par les conditions $a_0 b_0 = 1$ et $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ pour tout $n \geq 1$. On pose donc $b_0 = 1/a_0$, et par récurrence $b_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \geq 1$. Ceci construit l'inverse S de T. □

Notons que l'inverse d'une série formelle, lorsqu'il existe, est unique. Voici un exemple fondamental :

Lemme 4.0.3 *La série $\sum X^n$ est inversible dans $\mathbb{R}[[X]]$, d'inverse $1 - X$.*

Preuve. On vérifie immédiatement par télescopage que $(1 - X) \sum X^n = 1$. L'unicité de l'inverse conclut. □

Dans ce chapitre on apporte des réponses aux questions suivantes :

- comment déterminer le domaine de convergence d'une série entière ?
- les opérations définies formellement ci-dessus correspondent-elles aux opérations analogues sur les fonctions sommes de séries entières, dans un domaine de convergence approprié ?
- que peut-on dire des fonctions sommes de séries entières (quelle est leur régularité, leur croissance...) ?

4.1 Rayon de convergence

Clairement une série entière converge toujours en 0 et sa fonction somme f vérifie $f(0) = a_0$. Soit donc $\sum a_n x^n$ une série entière. L'ensemble

$$X := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la suite } (|a_n x^n|) \text{ est bornee}\}$$

est non vide, puisqu'il contient 0. C'est un intervalle, puisque si $x, y \in X$ et $x < y$, pour tout $z \in [x, y]$ on a $|z| \leq \max(|x|, |y|)$, et donc $|a_n z^n| \leq \max(|a_n x^n|, |a_n y^n|)$. Il s'ensuit que la suite $(|a_n z^n|)$ est bornée, donc $z \in X$.

Si X est borné on note

$$R := \sup X \in \mathbb{R}_+. \tag{4.1}$$

Sinon on pose $R = +\infty$. Évidemment on peut aussi écrire :

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty[\mid \text{la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornee}\}.$$

Théorème 4.1.1 *Supposons que $R \neq 0$. La série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur les compacts de $]-R, R[$, et elle diverge grossièrement en x si $|x| > R$.*

(*) *Preuve.* La deuxième affirmation est évidente, car si $|x| > R$, alors par définition de R la suite $(|a_n x^n|)$ n'est pas bornée, et donc ne converge pas vers 0. Ceci montre bien que la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

Pour la première affirmation, on doit montrer la convergence normale sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]-R, R[$; un tel intervalle est toujours contenu dans un intervalle de la forme $[-r, r]$, avec $0 < r < R$. Fixons $s > 0$ tel que $r < s < R$. Par définition de R la suite $(|a_n s^n|)$ est bornée. Si K en est un majorant, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-r, r]$ on a $|a_n x^n| = |a_n s^n|.|\frac{x}{s}|^n \leq K\alpha^n$, où $\alpha := \max_{|x|\leq r}(|\frac{x}{s}|) = \frac{r}{s} < 1$. La série $\sum \alpha^n$ converge, donc pas comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$. □

Le théorème implique immédiatement :

Corollaire 4.1.2 *On a* $R = \sup\{r \in [0, +\infty[\mid \sum a_n r^n \text{ converge}\}$.

Des théorèmes 3.2.2 et 3.1.1 (a), on déduit aussi :

Corollaire 4.1.3 *La somme f de la série $\sum a_n x^n$ est bien définie et c'est une fonction continue sur l'intervalle $]-R, R[$.*

Définition 4.1.4 *On appelle $R := \sup X$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $]-R, R[$ son intervalle de convergence.*

Pour savoir si la série $\sum a_n x^n$ converge aux bornes $\pm R$ de l'intervalle de convergence, il est nécessaire de faire une étude spécifique. Tous les cas de figures peuvent se produire. Par exemple :

- le rayon de convergence R de la série $\sum x^n/n$ est égal à 1, car $\sum r^n/n \leq \sum r^n$ converge pour tout $0 \leq r < 1$ et $\sum r^n/n$ diverge lorsque $r \geq 1$; la série est convergente en -1 (par la règle d'Abel) mais diverge en 1.
- le rayon de convergence de $\sum nx^n$ est aussi 1 (car la suite $(|nx^n|)$ est bornée si $|x| < 1$ vu qu'elle est convergente de limite 0), mais elle diverge en 1 et en -1.
- le rayon de convergence R de la série $\sum \ln(n)^n x^n$ est égal à 0, car pour tout $r > 0$ la suite $((\ln(n)r)^n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

La définition (4.1) et le critère suivant sont certainement les outils les plus puissants pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. Rappelons que pour toute suite réelle (u_n), on pose $\limsup u_n := +\infty$ si la suite n'est pas majorée, et sinon on définit $\limsup u_n$ comme la plus grande des valeurs d'adhérence de (u_n).

Théorème 4.1.5 (Formule d'Hadamard-Cauchy) *Soient $\sum a_n x^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et $l = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On a :*

- $R = 0$ *si* $l = +\infty$;
- $R = 1/l$ *si* $l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$;
- $R = +\infty$ *si* $l = 0$.

(*) *Preuve.* Si $l = +\infty$, par définition de lim sup il existe une sous-suite $(\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} = +\infty.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique

$$\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|} > \frac{2}{|x|},$$

soit encore $\sqrt[\varphi(n)]{|a_{\varphi(n)}|}|x| > 2$, donc $|a_{\varphi(n)}x^{\varphi(n)}| > 2^{\varphi(n)}$. Par propriété d'une suite extraite on a $\varphi(n) \geq n$, donc la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. On a pris $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque, donc $R = 0$ d'après (4.1).

Supposons maintenant que $l \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|.$$

Si $l = 0$, ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(|a_n x^n|)$ est bornée (encore par définition de lim sup). De (4.1) on déduit que $R = +\infty$.

Si $l \neq 0$ et $|x| < \frac{1}{l}$, alors $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $|a_n x^n| < 1$. La série $\sum a_n y^n$ est alors (absolument) convergente en tout point $|y| < |x|$, puisque pour tout $n \geq N$ on a $|a_n y^n| = |a_n x^n|.|\frac{y}{x}|^n \leq \alpha^n$, où $\alpha := \frac{y}{|x|} < 1$, et que la série $\sum \alpha^n$ converge. On a seulement supposé $|x| < \frac{1}{l}$, donc ceci montre que $R \geq \frac{1}{l}$ d'après le corollaire 4.1.2. Mais si $|x| > \frac{1}{l}$, comme dans le cas $l = +\infty$ on déduit que la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée, donc $R \leq \frac{1}{l}$, et finalement $R = \frac{1}{l}$. □

Comme pour les séries numériques on dispose aussi du critère de D'Alembert, qu'on rappelle ci-dessous. Ce critère une conséquence de celui d'Hadamard-Cauchy ; il est plus faible car il ne s'applique qu'aux séries qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum a_n x^n$ où (a_n) est une suite non lacunaire, et il a plus de formes indeterminées.

(Critère de D'Alembert) Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Supposons que la suite $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ converge dans $\mathbb{R}$. Alors la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right). \tag{4.2}$$

De manière plus précise, la série $\sum a_n x^n$:

- converge absolument dès que que $|x| \limsup(|a_{n+1}/a_n|) < 1$,
- diverge grossièrement dès que $|x| \liminf(|a_{n+1}/a_n|) > 1$.

(*) *Preuve. (Directe)* Notons $l' := \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$. Supposons que $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x| < 1/l'$ (ie. x est quelconque si $l' = 0$). Comme $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}x|/|a_n| = l'|x| < 1$, pour tout $r > 0$ tel que $l'|x| < r < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n+1}x|/|a_n| < r$ dès que $n \geq N$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul on a

$$\frac{|a_{n+k}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.\frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}.\cdots.\frac{|a_{n+k}|}{|a_{n+k-1}|}.$$

Donc pour tout $M \geq N$,

$$\sum_{n=N}^{M} |a_n x^n| = |a_N x^N|.\sum_{k=0}^{M-N} \left|\frac{a_{N+k}}{a_N}\right| |x^k| < |a_N x^N| \sum_{k=0}^{M-N} r^k \tag{4.3}$$

La série $\sum r^n$ converge, donc par comparaison $\sum |a_n x^n|$ converge également. Cette conclusion a lieu pour tout $|x| < 1/l'$, donc $R \geq 1/l'$. Enfin, si $|x| > 1/l'$ et $l'|x| >$

$r > 1$, on a $|a_{n+1}x|/|a_n| > r$ pour tout n assez grand, et l'inégalité (4.3) montre que la série diverge grossièrement. Donc $R = 1/l'$. On adapte facilement ces arguments pour montrer que la série converge absolument (resp. diverge grossièrement) dès que $|x| \limsup(|a_{n+1}/a_n|) < 1$ (resp. $|x| \liminf(|a_{n+1}/a_n|) > 1$).

(Via la formule d'Hadamard-Cauchy) D'après le théorème 4.1.5 il suffit de montrer que $l' := \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ est égal à $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Soit $l' > \epsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique

$$l' - \epsilon < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l' + \epsilon.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul on a $\frac{|a_{n+k}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot \frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{n+k}|}{|a_{n+k-1}|}$, donc

$$(l' - \epsilon)^k < \frac{|a_{N+k}|}{|a_N|} < (l' + \epsilon)^k$$

puis

$$(l' - \epsilon)^k |a_N| < |a_{N+k}| < (l' + \epsilon)^k |a_N|.$$

On passe à la racine $N + k$-ième et on calcule la limsup : on a

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{(l' \pm \epsilon)^k |a_N|} = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{(l' \pm \epsilon)^k} \ . \ \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{|a_N|}$$

et $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{(l' \pm \epsilon)^k} = l' \pm \epsilon$ et $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{|a_N|} = 1$ (par définition de la fonction $\sqrt[n]{\ }$, sachant que N est fixé). Donc

$$l' - \epsilon < \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[N+k]{|a_{N+k}|} < l' + \epsilon.$$

On peut prendre $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, donc cela prouve que $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l'$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 4.1.6 : calculs de rayons de convergence & comportements aux bornes. Pour chacune des suites (a_n) ci-dessous, R désigne le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$:

1. $a_n = 2^{\sqrt{n}}$, $R = 1$, la série diverge en -1 et en 1 ;
2. $a_n = 1 + 4^n$, $R = 1/4$, la série diverge en -1 et en 1 ;
3. $a_n = 1/(n + 1)^2$, $R = 1$, la série converge (absolument) en -1 et en 1 ;
4. $a_n = 1/2n+1$ si n est pair et $1/n^2$ si n est impair, $R = 1$ via Hadamard-Cauchy, la série converge en -1 et diverge en 1 ;
5. $a_n = n^n$, $R = 0$;
6. $a_n = 1/n!$, $R = +\infty$ (appliquer le critère de d'Alembert) ;

7. $a_n = \ln(n!)^3$, $R = 1$: une première méthode consiste à remarquer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$
d'après Hadamard-Cauchy et l'exemple 6 ci-dessus, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(n!)/n = +\infty$ en prenant le logarithme. Ceci permet de calculer
$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}}\right)^3 = 1.$$
On peut aussi utiliser "l'argument savant", la formule de Stirling
$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi},\ n \to +\infty.$$
Cette formule implique que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$. Par comparaison de séries à termes positifs équivalents il vient que R est aussi le rayon de convergence de la série $\sum (n\ln(n))^3 x^n$, et le critère de D'Alembert donne facilement $R = 1$.
8. $a_n = (\sinh(\frac{1}{n}) + \cosh(\frac{1}{n}))^{n^2}$, $R = e^{-1}$: on calcule un développement limité de a_n lorsque $n \to +\infty$, d'où l'on tire que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$.
9. $a_0 = 0$, et $a_{n+1} = \sqrt{n + a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R = 1$: on encadre, par exemple on prouve facilement par récurrence que $1 \leq a_n \leq 2n$ pour tout $n \geq 1$, donc
$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} = 1.$$
10. $a_n = (n!)^2$ si n est premier et $a_n = 0$ sinon, $R = 0$: en effet on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{p\ \text{premier}\to+\infty} \sqrt[p]{(p!)^2} = +\infty$$
(cf 6. ci-dessus).

Théorème 4.1.7 *Soient $A := \sum a_n x^n$ et $B := \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_A et R_B respectivement, et $C := A + B$ et $D := AB$ les séries somme et produit de A et B. Posons $R := \min(R_A, R_B)$. Alors :*

(a) Le rayon de convergence de C est supérieur ou égal à R, et égal à R si $R_A \neq R_B$.

(b) Le rayon de convergence de D est supérieur ou égal à R.

Preuve. (a) Pour tout $|x| < R$ les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent, donc leur somme $C := \sum (a_n + b_n)x^n$ converge (théorème de L1 sur la somme de deux séries réelles convergentes). Ceci prouve que le rayon de convergence de C est $\geq R$. Si de plus $R_A \neq R_B$, par exemple $R_A < R_B$, alors A diverge et B converge sur $]R_A, R_B[$, donc C diverge sur cet intervalle. Ceci prouve que le rayon de convergence de C est inférieur ou égal à R_A (qui vaut R). Par double inégalité, le rayon de convergence de C est R.

(b) Soit $x \in]-R, R[$. Les séries numériques $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent absolument. Donc leur produit de Cauchy converge aussi (théorème de Mertens). Mais leur produit de Cauchy est la série D. Donc le rayon de convergence de D est supérieur ou égal à R. $\square$

Exemple 4.1.8 Les exemples ci-dessous montrent que les bornes dans les deux items du théorème sont optimales :

1. Pour (a) : la somme des séries $\sum x^n$ et $\sum -x^n$ vaut 0 et a un rayon de convergence infini bien que les rayons de convergence des deux séries soient égaux à 1.
2. Pour (b) : (cf. Lemme 4.0.3) le produit des séries $\sum x^n$ et $1-x$ vaut 1 et a un rayon de convergence infini, bien que le rayon de convergence de $\sum x^n$ soit 1.

4.2 Dérivabilité, intégrabilité

Les deux théorèmes qui suivent sont les outils principaux que l'on utilise pour déterminer la fonction somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ sur son intervalle de convergence. Ils permettent souvent de trouver une équation différentielle dont $\sum a_n x^n$ est solution, et que l'on peut résoudre (cf. les exemples plus bas).

Théorème 4.2.1 *Soit $A := \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :*

(a) la série dérivée $A' := \sum (n+1)a_{n+1}x^n$ a pour rayon de convergence R.

(b) si f est la fonction somme de la série A sur $]-R, R[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est la somme de A' sur $]-R, R[$.

(*) *Preuve.* (a) On détermine le rayon de convergence de A' à l'aide de la formule d'Hadamard-Cauchy : on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1}. \limsup_{n\to+\infty} (\sqrt[n+1]{a_{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = 1.\frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

(prendre le logarithme pour se convaincre de la dernière égalité !). Alternativement, voici un argument direct. Pour tous $r, r' > 0$ on a

$$(n+1)a_{n+1}(r')^n = (a_{n+1}r^{n+1}).\frac{n+1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^n.$$

Si $r > r'$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{r}(\frac{r'}{r})^n = 0$ par les règles de croissances comparées, donc si $(a_n r^n)$ est une suite bornée, $((n+1)a_{n+1}(r')^n)$ l'est aussi. Ceci montre que le rayon de convergence R' de A' est $\geq R$. Réciproquement, si $R' > R$ et $r' > 0$ est tel que $R' > r' > R$, on écrit $a_{n+1}(r')^{n+1} = (n+1)a_{n+1}(r')^n.\frac{r'}{n+1}$, où la suite $((n+1)a_{n+1}(r')^n)$ est bornée par hypothèse. Alors $(a_{n+1}(r')^{n+1})$ est aussi bornée, ce qui contredit la définition de R. Donc $R' \leq R$, et finalement $R = R'$.

(b) Puisque A' converge normalement sur les compacts de $]-R, R[$, le théorème de dérivabilité et de continuité des séries de fonctions nous garantit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et que f' est la limite de la série A'. □

Remarque 4.2.2 Le comportement de A' au bord de l'intervalle de convergence n'est pas forcément le même que celui de A. Par exemple, $A := \sum x^n/n$ converge en -1 et $A' := \sum x^n$ diverge en -1.

Corollaire 4.2.3 *Soient $A := \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et $f\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ la fonction somme de A. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, il y a une unique série entière dont f est la somme sur $]-R,R[$.

(*) *Preuve.* Pour la première affirmation, on applique le théorème 4.2.1 aux séries dérivées successives de A. La formule de a_n vient en évaluant en 0. □

Concernant l'intégrabilité, tout se passe "aussi bien". Le résultat suivant est une conséquence immédiate des théorèmes 4.1.1, 3.2.2 et 3.1.1 (b) :

Théorème 4.2.4 *Soient $A := \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$, et $f\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ sa fonction somme. Alors f admet une primitive $F\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ qui s'annule en 0, et qui est la somme de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

En particulier, si $[a,b] \subset]-R,R[$ et f est intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Exemple 4.2.5 : calculs de sommes.

1. La série $A := \sum x^n/(n!)$ a un rayon de convergence infini, et sa somme f est la fonction exponentielle. En effet, $A' = A$, donc la somme f' de A' vérifie $f' = f$ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 4.2.1. La fonction exp est aussi solution de cette équation différentielle ; comme elle ne s'annule pas, on peut considérer la fonction $g = f/\exp$ sur $\mathbb{R}$. On a $g' = (f'\exp - f\exp)/\exp^2 = 0$, et $g(0) = 1$, donc g est la fonction constante égale à 1. Il s'ensuit que $f = \exp$.
2. La série $A := \sum(-1)^{n+1}x^n/n$ a un rayon de convergence égal à 1. Notons f sa fonction somme, définie sur $]-1,1[$. Le rayon de convergence de la série dérivée $A' = \sum(-1)^n x^n$ est aussi égal à 1, et on sait que la somme de cette série sur $]-1,1[$ est la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$ (Lemme 4.0.3). Donc $f'(x) = 1/(x+1)$, d'après le théorème 4.2.1. Puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) = \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$ (rappelons que la fonction ln est définie comme "la primitive de $1/x$ qui s'annule en 1".
3. Quelle est la somme de la série $\sum(n+1)x^n$? Son rayon de convergence est $R = 1$, et pour tout $|x| < 1$ on a

$$\sum(n+1)x^n = \sum\left(x^{n+1}\right)' = \left(\sum x^{n+1}\right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

où l'on utilise le théorème 4.2.1 dans la deuxième égalité.

4. Quelle est la somme de la série $\sum \frac{n+1}{n!}x^n$? Son rayon de convergence est $R = +\infty$. En réindexant et en utilisant l'exemple 1 on obtient $\sum \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n = xe^x$, donc par addition de séries entières de rayon de convergence 1 on a $\sum \frac{n+1}{n!}x^n = e^x(x+1)$.
5. Quelle est la somme de la série $\sum \frac{1}{(2n)!}x^n$? Le rayon de convergence est $R = +\infty$. Si $x \geq 0$, posant $y = \sqrt{x}$ on peut écrire
$$\sum \frac{1}{(2n)!}x^n = \sum \frac{1}{(2n)!}y^{2n} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \cosh(\sqrt{x}). \qquad (4.4)$$
Si $x \leq 0$, posant $y = \sqrt{-x}$ on peut écrire
$$\sum \frac{1}{(2n)!}x^n = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} = \cos(\sqrt{-x}).$$
On peut démontrer la dernière égalité de trois façons :
   - soit en multipliant y par i dans (4.4), ce qui transforme le membre de gauche en $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}$, et en observant que $\cosh(i\sqrt{-x}) = \cos(\sqrt{-x})$;
   - soit en observant que $\cos^{(n)}(0)$ vaut 0 si n est impair et $(-1)^p$ si $n = 2p$, puis en utilisant le théorème 4.3.8 puis le corollaire 4.3.2 ci-dessous pour identifier $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} = \sum \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}y^n$ à $\cos(y)$;
   - soit en dérivant deux fois l'expression, de sorte à vérifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$ telle que $f(0) = a_0 = 1$ et $f'(0) = a_1 = 0$, c'est-à-dire $\cos(y)$.
6. Quelle est la somme de la série $\sum(n^2+1)3^{n+1}x^n$? Par le critère de D'Alembert, $R = 1/3$. On réécrit la série de manière à faire apparaître les séries de sommes connues. Comme $n^2 + 1 = (n+2)(n+1) - 3n - 1$, pour tout $|x| < 1/3$ on a
$$\begin{aligned}\sum(n^2+1)3^{n+1}x^n &= \\ &= 3\left(\sum(n+2)(n+1)(3x)^n - 3\sum(n+1)(3x)^n + 2\sum(3x)^n\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{9}\left(\sum(3x)^n\right)'' - \frac{1}{3}\left(\sum(3x)^n\right)' + 2\sum(3x)^n\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-3x}\right)'' - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-3x}\right)' + 2\frac{1}{1-3x}\right)\end{aligned}$$
Où l'on utilise la somme $\sum(3x)^n = 1/(1-3x)$, $|x| < 1/3$.
7. Quelle est la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$? Clairement $R = 1$. On peut écrire $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ (décomposition en éléments simples) et utiliser le développement de $\ln(1-x)$ (cf. l'exemple 2. plus haut) pour les deux séries qu'on obtient. Alternativement on peut dériver la somme f de la série sur l'intervalle de convergence, $]-1,1[$, ce qui donne par le théorème 4.2.1 :
$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^{n-1} = -\ln(1-x).$$

Donc $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

8. Quelle est la somme f de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{n+3} x^n$? Le rayon de convergence est 1. On écrit $\frac{4n}{n+3} = \frac{4(n+3-3)}{n+3} = 4 - \frac{12}{n+3}$, donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{n+3} x^n = 4\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^n\right).$$
La première série à droite vaut $\frac{1}{1-x}$. La somme g de la seconde série vérifie $g(0) = \frac{1}{3}$, et sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$ on peut diviser par x :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^n = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^{n+3} = \frac{1}{x^3}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right).$$
Donc
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^3}\left(-\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\}. \end{cases}$$
(Bien que ce ne soit pas explicite, l'expression pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ se prolonge bien en $x = 0$ de manière infiniment dérivable !). Finalement on en déduit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{4}{1-x} + \dfrac{12}{x^3}\left(\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\}. \end{cases}$$

4.3 Fonctions développables en série au voisinage de 0, théorème des zéros isolés

Le corollaire 4.2.3 montre que les fonctions qui sont sommes de séries entières ont un développement de Taylor en 0 qui converge en tout point de l'intervalle de convergence $]-R,R[$. Cette propriété remarquable justifie de donner un nom à ces fonctions :

Définition 4.3.1 *Soit $R > 0$. On dit qu'une fonction $f\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ est développable en série entière, ou simplement développable en série, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R, telle que pour tout $x \in]-R,R[$ on a $f(x) = \sum a_n x^n$.*

Si $I \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de 0, on dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est développable en série au voisinage de 0 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]-\epsilon,\epsilon[\subset I$ et la restriction de f à $]-\epsilon,\epsilon[$ est développable en série.

Avec cette terminologie, le corollaire 4.2.3 implique :

Corollaire 4.3.2 *Si f est une fonction développable en série dans un voisinage de 0, son développement en série dans ce voisinage est*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Nous verrons plus loin que la plupart, sinon toutes les fonctions manipulées jusqu'en L1 sont développables en séries au voisinage de 0 ou un autre point (cf. les sections 4.4 et 4.6). Cependant il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière. Par exemple :

Corollaire 4.3.3 *La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série au voisinage de 0. Même chose pour la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$.*

Pour la preuve nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3.4 *Soit f :$]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que f est dérivable sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$, et que les limites $\lim_{t\to c^\pm} f'(t)$ existent, sont finies et égales. Alors f est dérivable en c et $f'(c)$ vaut la valeur commune de ces limites.*

Preuve. Soit $x \in]a, c[$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $t \in]x, c[$ tel que $f(c) - f(x) = f'(t)(c - x)$. Prenons la limite $t \to c^-$. On a

$$\lim_{t\to c^-} f'(t) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'_g(c),$$

qui est la dérivée à gauche de f en c. Ceci montre que f est dérivable à gauche en c. Par le même raisonnement, f est dérivable à droite en c et la dérivée à droite est $f'_d(c) = \lim_{t\to c^+} f'(t)$. Mais on sait que f est dérivable en c si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en c et les dérivées à droite et à gauche $f'_g(c)$ et $f'_d(c)$ sont égales. □

Preuve du Corollaire 4.3.3. On vérifie facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $d_n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{d_n}} \exp(-1/x^2).$$

Je laisse la vérification en exercice. Donc $\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)$ par croissances comparées. Grâce au lemme, dans le cas $n = 1$ on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$, puis par récurrence immédiate que f est infiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f avait un développement en série $\sum a_n x^n$ dans un voisinage de 0, on aurait donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Corollaire 4.3.2), soit $f = 0$. Or ce n'est pas le cas. Des arguments similaires s'appliquent à la fonction g. □

Voici une autre conséquence du corollaire 4.3.2, qui montre la "rigidité" des fonctions développables en séries, une autre de leurs propriétés remarquables.

Corollaire 4.3.5 *Soient $R > 0$, et $f, g\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$ deux fonctions développables en série. S'il existe un intervalle $]-\epsilon, \epsilon[\subset]-R, R[$ contenant 0 et tel que f et g sont égales sur $]-\epsilon, \epsilon[$, alors $f = g$ sur $]-R, R[$. En particulier, si f est nulle sur $]-\epsilon, \epsilon[$, elle est nulle sur $]-R, R[$.*

Preuve. En considérant la différence $f-g$ il suffit de prouver la dernière affirmation. Or, si f est nulle sur $]-\epsilon,\epsilon[$, toutes ses dérivées sont nulles en 0. Le corollaire 4.3.2 implique alors que $f=0$. □

Comme pour les polynômes, si $f\colon]-R,R[\to\mathbb{R}$ est développable en série, si $f(x)=0$ on dit que *x est un zéro de f*.

Théorème 4.3.6 (Zéros isolés) *Si f est une fonction non identiquement nulle et développable en série au voisinage de 0, et $f(0)=0$, alors il existe $\epsilon>0$ tel que 0 est le seul zéro de f dans l'intervalle $]-\epsilon,\epsilon[$.*

(*) *Preuve.* Par hypothèse il existe $\epsilon'>0$ tel que f est développable en série sur $]-\epsilon',\epsilon'[$. Soit $\sum a_n x^n$ son développement en série. Puisque f n'est pas identiquement nulle et $f(0)=a_0=0$, $a_n\neq 0$ pour au moins un entier $n\geq 1$. On peut donc écrire $f(x)=x^k g(x)$ où k est le plus petit entier tel que $a_k\neq 0$, et g est la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}x^n$. Clairement g a le même rayon de convergence que f, et $g(0)=a_k\neq 0$. Comme g est continue sur $]-\epsilon',\epsilon'[$ et $g(0)\neq 0$, il existe $\epsilon>0$ tel que $\epsilon'>\epsilon$ et $g(x)\neq 0$ pour tout $x\in]-\epsilon,\epsilon[$. Or x^k ne s'annule dans $]-\epsilon,\epsilon[$ qu'au seul point $x=0$, donc il en va de même de $f(x)$. □

Ce théorème permet d'obtenir l'énoncé suivant, qui renforce considérablement le corollaire 4.3.5. En effet il montre que toute fonction développable en série au voisinage de 0 est complètement déterminée par ses valeurs sur n'importe quel sous-ensemble infini ayant 0 pour valeur d'adhérence. Cette propriété est un peu analogue au fait que deux polynômes de même degré et égaux en un nombre fini suffisamment grand de points (deg+1 points suffisent) sont égaux.

Corollaire 4.3.7 *Soient f et g deux fonctions développables en série au voisinage de 0 et soit I un intervalle contenant 0 sur lequel f et g sont les sommes de leur séries. S'il existe une suite réelle à termes non nuls (x_n) incluse dans I telle que (x_n) converge vers 0 et $f(x_n)=g(x_n)$ pour tout n, alors $f=g$ sur I.*

(*) *Preuve.* Supposons que $h=f-g$ n'est pas identiquement nulle sur I. D'après l'hypothèse, $h(x_n)=0$ pour tout entier n. Comme (x_n) converge vers 0, cela implique que h possède une infinité de zéros dans tout intervalle $]-\epsilon,\epsilon[\subset I$. De plus, $h(0)=\lim_{n\to+\infty} h(x_n)=0$. C'est en contradiction avec le théorème des zéros isolés, donc $f=g$. □

Finalement, quelles sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont développables en série au voisinage de 0 ? Le résultat suivant donne une condition suffisante, qui s'exprime en terme de *croissance de la suite des dérivées* (comparer avec l'exemple 4.1.6 (4)).

Théorème 4.3.8 *Soient $a>0$ et $f\colon]-a,a[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $r>0$ et $M\geq 0$ tels que*

$$\forall x\in]-a,a[,\forall n\in\mathbb{N},|f^{(n)}(x)|\leq\frac{Mn!}{r^n}. \tag{4.5}$$

Alors f est développable en série entière sur $]-R,R[$, où $R=\min(a,r)$. En particulier, s'il existe une constante K telle que $\sup_{k\in\mathbb{N}}||f^{(k)}||<K$, alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

Preuve. L'hypothèse implique que $|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}|.|x|^n \leq M$ dès que $|x| < \min(a,r) = R$, donc d'après la définition (4.1) la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. De plus, l'inégalité de Taylor implique que pour tout $x \in]-a,a[$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{t\in[0,x]} |f^{(N+1)}(t)| \leq M \frac{|x|^{N+1}}{r^{N+1}}.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ et $|x| < r$, donc $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ sur $]-R,R[$. Ceci prouve la première affirmation.

Pour la seconde affirmation, montrons que la condition (4.5) est vérifiée. Notons que pour tout $r > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{r^n} = +\infty$ (cf. par exemple les arguments au début de l'exemple 4.1.6 (6), au bien observer que pour tout $M > 1$, si n est assez grand tel que $\frac{n+1}{r} > M$, alors $\frac{(n+k)!}{r^{n+k}} > M^k \frac{n!}{r^n}$ qui tend vers $+\infty$ avec k). Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n!}{r^n} > K$ pour tout $n > N$. Posons

$$M' := \min_{n=0,1,\ldots,N} \left(\frac{n!}{r^n} \right) \ , \ M = \max\left(\frac{K}{M'}, 1 \right).$$

Si $n > N$, on a $||f^{(n)}|| < K < \frac{n!}{r^n}$ d'après l'hypothèse et la définition de N, et si $n \leq N$ on a $||f^{(n)}| < K = \frac{K}{M'}.M' < \frac{K}{M'}.\frac{n!}{r^n}$. Dans le premier cas, l'hypothèse (4.5) est vérifiée avec la constante $M = 1$, et dans le second cas elle est vérifiée en prenant $M = \frac{K}{M'}$. Comme r est quelconque, $R = \min(a,r) = a$, et le développement en série a lieu sur tout $]-a,a[$. □

4.4 Les fonctions usuelles

Voici les développements en série entière de quelques fonctions usuelles, et les intervalles sur lesquels ces développements sont valides :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum x^n && , |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum (-1)^n x^n && , |x| < 1 \\
e^x &= \sum \frac{x^n}{n!} && , x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} && , |x| < 1 \\
\sin(x) &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && , x \in \mathbb{R} \\
\cos(x) &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && , x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n && , |x| < 1 \\
\arcsin(x) &= \sum \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && , |x| < 1 \\
\arctan(x) &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && , |x| < 1 \\
\arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) && , |x| < 1.
\end{aligned}
$$

Le développement de $\frac{1}{1-x}$ vient du lemme 4.0.3 (son rayon de convergence est évidemment 1), et celui de $\frac{1}{1+x}$ en substituant $-x$ à x. Les développements de e^x et $\ln(1+x)$ ont été obtenus dans les exemples 4.2.5 (1) et (2).

Pour sin (et pareillement cos), on peut utiliser le théorème 4.3.8. La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\sin^{(k)} = \pm \sin$ ou $\pm \cos$, donc $|| \sin^{(k)} || \leq 1$. Alors la seconde affirmation du théorème implique que sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Comme $\sin^{(n)}(0) = \pm \sin(0) = 0$ si n est pair, et $\sin^{(n)}(0) = (-1)^p$ si $n = 1 + 2p$, on a

$$
\sin(x) = \sum \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.
$$

Le développement de $(1+x)^\alpha$ sera démontré en TD. En prenant $\alpha = -1$ et en substituant x^2 à x il vient

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)^{-1} &= \sum \frac{-1(-2)(-3)\dots(-n)}{n!} (x^2)^n \\
&= \sum (-1)^n x^{2n}
\end{aligned}
$$

avec rayon de convergence 1. Comme $\arctan'(x) = (1+x^2)^{-1}$, le théorème 4.2.4 implique

$$
\begin{aligned}
\arctan(x) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} &= \sum (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x \\
&= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

pour tout $|x| < 1$. On peut procéder de la même manière avec arcsin et arccos, en prenant α convenable (exercice !).

Grâce au théorème 4.1.7, on peut déduire des développements en série des fonctions ci-dessus ceux des sommes et produits de ces fonctions. Par exemple, par décomposition en éléments simples puis substitution des développements en série entière on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} &= 2 \sum (2x)^n - \sum x^n \\
&= \sum (2^{n+1} - 1) x^n.
\end{aligned}
$$

Ce développement est valide pour $|x| < 1/2$, puisque $1/2$ est le rayon de convergence des séries $\sum (2x)^n$ et $\sum (2^{n+1} - 1) x^n$.

4.5 Substitution des séries et composition des fonctions

Nous avons montré dans les sections précédentes que la somme, le produit, la dérivation et l'intégration des séries entières correspondait à ces mêmes opérations sur leurs fonctions sommes. Dans cette section nous montrons qu'il en va de même pour la *substitution des séries*, versus la composition des fonctions sommes.

Considérons tout d'abord le cas des polynômes, puis celui des séries formelles et enfin les séries entières.

Soient $P(X) := \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ et $Q(X) := \sum_{m=0}^{M} b_m X^m$ deux polynômes à coefficients réels. On dit que le polynôme

$$P \circ Q := \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\sum_{m=0}^{M} b_m X^m \right)^n$$

est obtenu par *substitution* de Q dans P. Il est évident que, si p et q sont les fonctions polynômiales réelles définies par P et Q, alors $p \circ q$ est la fonction associée au polynôme $P \circ Q$ (ce qui justifie la notation "$\circ$"). Il n'est pas difficile de montrer les propriétés suivantes : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\begin{aligned} (P+Q) \circ R &= P \circ R + Q \circ R \\ PQ \circ R &= (P \circ R)(Q \circ R) \\ (P \circ Q) \circ R &= P \circ (Q \circ R) \\ (P \circ Q)' &= (P' \circ Q)Q'. \end{aligned}$$

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.5.1 *Supposons que P et Q sont comme plus haut, et $b_0 = 0$ (autrement dit X divise Q). Si on pose $P \circ Q = \sum_{k=0}^{MN} c_k X^k$, alors pour tout $K \in \{0, 1, \ldots, \min(M, N)\}$, c_K dépend uniquement des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_K$ et $b_1, \ldots, b_K$.*

Preuve. Posons $P = P_1 + X^{K+1} P_2$ et $Q = Q_1 + X^{K+1} Q_2$, où $P_1(X) = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$ et $Q_1(X) = \sum_{k=0}^{K} b_k X^k$. Nous allons montrer que pour tout $K \in \{0, 1, \ldots, \min(M, N)\}$, le coefficient de X^K dans $P \circ Q$ est le même que le coefficient de X^K dans $P_1 \circ Q_1$, ce qui implique le résultat du lemme. On a :

$$P \circ Q = P_1 \circ Q + Q^{K+1} P_2 \circ Q = P_1 \circ (Q_1 + X^{K+1} Q_2) + Q^{K+1} P_2 \circ Q.$$

Le binôme de Newton appliqué à $(Q1 + X^{K+1} Q_2)^n$ montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de X^K dans $(Q1 + X^{K+1} Q_2)^n$ est le même que le coefficient de X^K dans Q_1^n. Ainsi, le coefficient de X^K dans $P_1 \circ Q$ est le même que le coefficient de X^K dans $P_1 \circ Q_1$. Puisque X divise Q par hypothèse, X^{K+1} divise $Q^{K+1}(P_2 \circ Q)$, et donc le coefficient de X^K dans $Q^{K+1}(P_2 \circ Q)$ est nul. Finalement, le coefficient de X^K dans $P \circ Q$ est le même que le coefficient de X^K dans $P_1 \circ Q_1$. $\square$

Passons aux séries formelles. Si $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est une série formelle, on pose

$$S[n] := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

et on dit que $S[n]$ est la *troncature à l'ordre* n de la série S ; c'est un polynôme de degré au plus n. Si $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $T := \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ sont deux séries formelles, et $b_0 = 0$, on définit la série formelle

$$S \circ T := \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \tag{4.6}$$

de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n est le coefficient de X^n dans le polynôme $S[n] \circ T[n]$. On dit que $S \circ T$ est la série obtenue par *substitution* de T dans S. Le résultat suivant, qui est une conséquence du lemme 4.5.1 et impose donc que $b_0 = 0$, montre que cette définition de $S \circ T$ est "stable" :

Proposition 4.5.2 *Soient $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $T := \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ deux séries formelles, avec $b_0 = 0$. Pour tous $l, m \geq n$, la troncature de $S[l] \circ T[m]$ à l'ordre n et la troncature de $S[n] \circ T[n]$ à l'ordre n sont égales.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent sur les polynômes. □

On peut vérifier, en utilisant les formules analogues pour les polynômes, que l'opération de substitution des séries formelles a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
(S_1 + S_2) \circ T &= S_1 \circ T + S_2 \circ T \\
S_1 S_2 \circ T &= (S_1 \circ T)(S_2 \circ T) \\
(S \circ T) \circ U &= S \circ (T \circ U) \\
(S \circ T)' &= (S' \circ T) T'.
\end{aligned}$$

où S_1, S_2, T, S et U sont des séries formelles, et le coefficient constant de T et U est nul (afin que la substitution ait un sens). On remarquera que, si le coefficient constant de T et U est nul, alors le coefficient constant de $T \circ U$ est nul.

Exemple 4.5.3
1. Si $S := \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ et $T := \sum_{n=1}^{\infty} X^n$, alors $S \circ T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ où $c_0 = 1$, c_1 est le coefficient de X dans $1 + X$, soit $c_1 = 1$, c_2 est le coefficient de X^2 dans le polynôme $1 + (X + X^2) + (X + X^2)^2$, soit $c_2 = 2$, c_3 est le coefficient de X^3 dans le polynôme $1 + (X + X^2 + X^3) + (X + X^2 + X^3)^2 + (X + X^2 + X^3)^3$, soit $c_3 = 4$, etc.
2. Si $S := \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ et $T := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} X^n$, alors $S = (1 - X)^{-1}$ d'après le lemme 4.0.3, et $1 - T = (1 + X)^{-1}$. Donc

$$S \circ T = (1 - T)^{-1} = 1 + X.$$

Nous pouvons maintenant passer aux séries entières, et aborder le résultat principal de cette section :

Théorème 4.5.4 *Soient $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $T := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R_S, R_T > 0$, et de sommes $f :]-R_S, R_S[\to \mathbb{R}$ et $g :]-R_T, R_T[\to \mathbb{R}$ respectivement. On suppose que $b_0 = 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que :*

(a) $\epsilon \leq R_T$ et pour tout $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n$ converge et sa somme est inférieure strictement à R_S.

(b) le rayon de convergence de la série entière $S \circ T$ est supérieur ou égal à ϵ, et sa somme sur $]-\epsilon, \epsilon[$ est $f \circ g$.

Preuve. (a) La série $H := \sum |b_n| x^n$ a pour rayon de convergence R_T (eg. par la formule d'Hadamard-Cauchy). Soit $h\colon]-R_T, R_T[\to \mathbb{R}$ la somme de H. Puisque $b_0 = 0$, on a $h(0) = 0$. Puisque h est continue et $h(0) = 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq R_T$ (afin que h soit définie sur $]-\epsilon, \epsilon[$) et $|h(x)| < R_S$ si $|x| < \epsilon$.

(b) Soit $x_0 \in]-\epsilon, \epsilon[$, où ϵ est comme ci-dessus. On doit montrer que la série $S \circ T$ converge en x_0. Commençons par exprimer $S \circ T$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons

$$T^n := \textstyle\sum_k d_{n,k} X^k$$

la série formelle T à la puissance n ; les coefficients $d_{n,k}$ sont obtenus par produits de Cauchy $n-1$ fois de T avec elle-même (le produit de Cauchy AB de deux séries formelles A et B est rappelé sous la définition 4.0.1). Puisque $b_0 = 0$, le plus petit degré de X dans T^n est n, donc $d_{n,k} = 0$ pour tout $k < n$. En remplaçant brutalement X^n par T^n dans la série $\sum_n a_n X^n$ on obtient la série formelle *double*

$$\sum_n a_n \sum_k d_{n,k} X^k. \tag{4.7}$$

On va montrer que cette série double converge en x_0, et qu'elle coincide avec $S \circ T$, définie dans (4.6).

D'abord, T^n et T ont le même rayon de convergence R_T, alors $|x_0| < \epsilon \leq R_T$ implique que la série $\sum_k |d_{n,k}|.|x_0|^k$ converge. De plus, l'inégalité triangulaire sur les coefficients $|d_{n,k}|$ (où les $d_{n,k}$ ont été obtenus par produits de Cauchy, cf plus haut) donne

$$\sum_k |d_{n,k}|.|x_0|^k \leq \left(\sum_k |b_k|.|x_0|^k \right)^n. \tag{4.8}$$

Notons $M := \sum |b_k||x_0|^k$. D'après (a) on a $M < R_S$, donc la série $\sum |a_n| M^n$ converge. D'après (4.8), on a

$$\sum_n |a_n| \sum_k |d_{n,k}|.|x_0|^k \leq \sum |a_n| M^n,$$

donc

$$\sum_n |a_n| \sum_k |d_{n,k}|.|x_0|^k \quad \textit{converge.}$$

Par le théorème classique sur les séries doubles il s'ensuit que :

- la série $\sum_{k,n} a_n d_{n,k} x_0^k$ converge et a pour somme $\sum_n a_n g(x_0)^n = f \circ g(x_0)$;

- on peut permuter les sommes en k et n, donc

$$\sum_{k,n} a_n d_{n,k} x_0^k = \sum_k \left(\sum_n a_n d_{n,k} \right) x_0^k.$$

Dans cette deuxième écriture, le coefficient $\sum_n a_n d_{n,k}$ de x_0^k a tous les $d_{n,k} = 0$ pour $n > k$. Ce qui reste est le coefficient de x_0^k dans $S \circ T$. Conclusion : $S \circ T(x_0) = f \circ g(x_0)$. $\square$

Corollaire 4.5.5 *Si f et g sont des fonctions développables en série au voisinage de* 0 *et $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ est développable en série au voisinage de* 0.

Voici une application fondamentale de ce résultat :

Corollaire 4.5.6 *Soit I est un intervalle qui contient* 0 *en son intérieur, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) \neq 0$. Si f est développable en série au voisinage de* 0*, alors $1/f$ est développable en série au voisinage de* 0*. Si la série de f est F, alors F est inversible et la série de $1/f$ est F^{-1}.*

Preuve. Notons $f(x) = \sum a_n x^n$ au voisinage de zéro. Comme $f(0) = a_0 \neq 0$ par hypothèse, on peut diviser par a_0 : en substituant $S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} x^n$ à x dans la série entière $U := (1+x)^{-1} = \sum (-1)^n x^n$, on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0(1+S)} = \frac{1}{a_0} U \circ S.$$

On obtient à droite le développement en série de $1/f$. $\square$

4.6 Fonctions développables en série au voisinage d'un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ un point de l'intérieur de I.

Définition 4.6.1 *On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si la fonction $g : x \mapsto f(x + x_0)$ est développable en série au voisinage de* 0.

De manière équivalente, f est développable en série entière au voisinage de x_0 s'il existe une suite réelle (a_n) et $\epsilon > 0$ tels que $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$ et pour tout $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{4.9}$$

La théorie des fonctions développables au voisinage de 0 se transpose immédiatement aux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ développables au voisinage de x_0 intérieur à I. Ainsi :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$;

- Dans le développement en série (4.9), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!};$$

- **(théorème des zéros isolés)** si f est nulle (respectivement constante) dans un voisinage de x_0, ou seulement sur une suite non stationnaire de I qui converge vers x_0, alors f est nulle (respectivement constante) sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.

Exemple 4.6.2 1. La fonction exp est développable en série au voisinage de tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et ce développement prend la forme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n.$$

2. Moins banal : le logarithme $f \colon x \mapsto \ln(x)$ est développable en série au voisinage de 1, puisque $x \mapsto \ln(1 + x)$ est développable en série au voisinage de 0 et sa série converge sur $] - 1, 1[$. Le développement en série de ln au voisinage de 1 est :

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1)^n \quad , x \in]0, 2]$$

Plus généralement : pour tout $a > 0$, le développement en série de f au voisinage de a est

$$\ln(x) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n}(x - a)^n \quad , x \in]0, 2a]. \tag{4.10}$$

En effet, la fonction g définie par $g(x) := \ln(x + a) = \ln(a) + \ln(1 + \frac{x}{a})$ est développable en série pour $-1 < \frac{x}{a} \leq 1$, soit lorsque $0 < x + a \leq 2a$. Le développement (4.10) découle alors de celui de $\ln(1+\frac{x}{a})$; on peut aussi remarquer que $f^{(n)}(a)/n! = g^{(n)}(0)/n! = (-1)^{n+1}/na^n$.

3. On a $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais aussi, en développant au voisinage de -2π et en utilisant le fait que la fonction sinus et ses dérivées sont 2π-périodiques :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}(x + 2\pi)^{2n+1} \quad , \ x \in \mathbb{R}.$$

On peut remarquer que les termes de la somme ne sont pas des fonctions 2π-périodiques, mais qu'on obtient cependant l'identité (!) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!}(x + 2\pi)^{2n+1} \quad , \ x \in \mathbb{R}.$$

Une question naturelle se pose : supposons que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction développable en série au voisinage d'un point $x_0 \in I$; soit alors $\epsilon > 0$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ pour tout $x \in]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$, et $x_1 \in]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$. La question est :

Est-ce que f est aussi développable en série au voisinage de x_1 ?

La réponse est oui : f est la somme d'une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_1)^n$ sur le plus grand intervalle $]x_1-\epsilon', x_1+\epsilon'[$ inclus dans $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$. Ce résultat est formulé dans le théorème suivant lorsque $x_0 = 0$ (ϵ est noté R, x_1 est x_0, et ϵ' est r) ; le cas général s'en déduit par translation.

Théorème 4.6.3 *Soient $R > 0$ et $f\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière. Alors f est développable en série au voisinage de tout point $x_0 \in]-R,R[$. Plus précisément, si on pose $r := R - |x_0|$, alors pour tout $x \in]x_0-r, x_0+r[\subset]-R,R[$ on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{4.11}$$

Preuve. Posons $f(x) = \sum a_n x^n$, $x \in]-R,R[$. Montrons que la série $\sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est absolument convergente. Par le théorème de dérivation des séries entières, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|f^{(k)}(x_0)| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x_0^{n-k}\right| \le \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \frac{n!}{(n-k)!} |x_0|^{n-k}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}|x-x_0|^k &\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \frac{n!}{(n-k)!}|x_0|^{n-k}\right)\frac{1}{k!}|x-x_0|^k \qquad (4.12) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| C_k^n |x_0|^{n-k}|x-x_0|^k\right). \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on permute les sommes en k et n on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n |x_0|^{n-k}|x-x_0|^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.(|x_0|+|x-x_0|)^n.$$

Pour tout $x \in]x_0-r, x_0+r[\subset]-R,R[$ on a

$$|x_0| + |x-x_0| < |x_0| + r = R.$$

Donc la dernière série ci-dessus converge. Par le théorème classique sur les séries doubles, cela montre que la série double $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x_0^{n-k}(x-x_0)^k\right)$ converge, et qu'on peut permuter les sommes en k et n. On peut donc reprendre le calcul à partir de (4.12) sans les valeurs absolues ; les inégalités deviennent des égalités, et on obtient finalement $\sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum a_n x^n$. $\square$

Le résultat suivant améliore le théorème des zéros isolés ; l'amélioration tient en ce qu'on ne demande pas que la limite de la suite (a_n) soit 0. Par translation se résultat s'étend immédiatement aux fonctions développables au voisinage d'un point x_0 quelconque.

Corollaire 4.6.4 *Si $f\colon]-R,R[\to \mathbb{R}$ est une fonction développable en série entière, et f s'annule sur un intervalle d'intérieur non vide, ou seulement s'il existe une suite non stationnaire (a_n) incluse dans $]-R,R[$ et convergente dans $]-R,R[$ et telle que $f(a_n)=0$, alors f est la fonction nulle.*

Preuve. Soient (a_n) une telle suite et x_0 sa limite. D'après le théorème 4.6.3, f est développable au voisinage de x_0, et d'après le théorème des zéros isolés au voisinage de x_0, il existe $\epsilon > 0$ tel que f est nulle sur $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$. Soit $]a,b[$ le plus grand intervalle inclus dans $]-R,R[$ qui contient x_0 et tel que f soit nulle sur $]a,b[$; donc $]a,b[$ est la réunion de tous les intervalles ouverts qui contiennent x_0 et sur lesquels f s'annule. On a $a<b$, car $]x_0-\epsilon,x_0+\epsilon[\subset]a,b[$, et toutes les dérivées de f s'annulent sur $]a,b[$. Si $b\neq R$, par continuité, f et toutes les dérivées de f s'annulent en b. De plus, f est développable en série entière au voisinage de b par le théorème 4.6.3, et la formule (4.11) implique que ce développement en série est nul. Il existe donc $\epsilon'>0$ tel que f est nulle sur $]b-\epsilon', b+\epsilon'[$. Ainsi, f est nulle sur $]a, b+\epsilon'[$, ce qui contredit la maximalité de $]a,b[$. Donc $b=R$. Le même raisonnement montre que $a=-R$. □

Remarque 4.6.5 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle aussi *fonctions analytiques réelles* les fonctions définies sur I et développables en série au voisinage de tout point de I. On peut montrer que ces fonctions sont plutôt rares dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. À l'inverse, il existe une notion de dérivabilité pour les fonctions d'une variable complexe, et une notion, analogue à celle de ce chapitre, de fonction qui admet un développement en série entière d'une *variable complexe* en tout point d'un ouvert de $\mathbb{C}$, et ces deux notions coincident. La théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe est donc beaucoup plus riche que dans le cas réel. Elle est étudiée en L3 et M1 dans les UE "Fonctions holomorphes".

4.7 Une application aux équations différentielles

Voici une méthode très classique pour déterminer des solutions développables en séries entières (au voisinage de 0, pour simplifier) d'une équations différentielle ordinaire :

- On commence par supposer qu'il existe une solution de l'équation développable en série entière au voisinage de 0, $y(x)=\sum a_n x^n$;
- on dérive terme à terme cette série pour exprimer $y'(x)$, $y''(x)$, etc..., et on injecte les résultats dans l'équation ;
- par des changements d'indice, on se ramène à une expression $\sum b_n x^n = 0$, où la suite (b_n) s'écrit en fonction de la suite (a_n) ;

- par unicité des coefficients d'une série entière, on sait que $b_n = 0$; on essaie alors d'en déduire (a_n), en fonction éventuellement de certains paramètres ;
- on vérifie que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul ; sa somme y est alors une solution de l'équation différentielle.

Cette méthode permet souvent de déterminer *toutes* les solutions de l'équation. On renvoie aux nombreux cours et exercices en ligne sur les équations différentielles (par ex. sur Bibmath, ou en tapant "séries entières Wronskien" dans votre moteur de recherche préféré) pour des développements sur ce sujet. Nous nous contentons ici d'appliquer la méthode sur un exemple ; nous en verrons d'autres en TD.

Un exemple : l'équation différentielle de Bessel d'ordre 0,

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0. \tag{4.13}$$

Les coefficients de cette équation sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On cherche une solution $J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $J(x) = \sum a_n x^n$, et on suppose que le rayon de convergence R de J est non nul. Alors pour tout $x \in]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned} x^2J(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n \\ xJ'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ x^2J''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n. \end{aligned}$$

Donc J est solution de l'équation (4.13) si, et seulement si,

$$a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2}\right) x^n = 0,$$

Puisque les coefficients d'une série entière sont uniquement déterminés par sa somme, et qu'ici on obtient 0, on a $a_1 = 0$ et chaque coefficient de la somme est nul, soit $a_n = -a_{n-2}/n^2$ pour tout $n \geq 2$. Par une récurrence immédiate il vient $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite a_{2n} est déterminée par a_0 ; en fait

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!^2}a_0,$$

mais il n'est pas nécessaire de le savoir pour ce qui suit. Si $a_0 = 0$, J est la série nulle. Si $a_0 \neq 0$, alors $a_{2n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut appliquer le critère de D'alembert à la série numérique $\sum a_{2n}x^{2n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{(2n+2)^2} = 0$$

donc J a pour rayon de convergence $R = +\infty$: c'est une solution de (4.13) définie sur $\mathbb{R}$. Clairement, si on note J_0 la solution telle que $J(0) = a_0 = 1$, alors $J = a_0J_0$.

Remarque 4.7.1 L'équation (4.13) est linéaire d'ordre 2. D'après les théorèmes connus sur les équations différentielles ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Nous venons d'en déterminer un sous-espace, la droite engendrée par J_0, qui est *la* solution telle que $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$. On appelle J_0 la *fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0* (voir l'article Wikipedia "Fonction de Bessel" pour son histoire et des généralisations).

Exercice : En utilisant la méthode ci-dessus, montrer que l'équation différentielle (où $n \in \mathbb{N}$) :

$$xy''(x) + (2n+1)y'(x) + xy(x) = 0 \tag{4.14}$$

admet comme solution sur $\mathbb{R}$ la fonction $y(x) = \sum (-1)^p \dfrac{n!}{p!(n+p)!}(x/2)^{2p}$.

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Fonctions et séries de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Dans les chapitres précédents nous avons considéré des suites et séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant expliquer comment les notions de convergence que nous avons rencontrées se généralisent aux suites et séries de fonctions *vectorielles*, ie. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$. Pour simplifier les notations nous développons le cas de $\mathbb{R}^2$, le cas général se faisant de la même manière.

Nous utiliserons la terminologie suivante :

— Nous dirons qu'une suite $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On pose alors

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n, b_n) := \left(\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n\right).$$

— Soit $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de $\mathbb{R}^2$. On appelle *série de terme général* $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (S_N), où $S_N := \sum_{k=0}^{N}(a_n, b_n)$. On note cette série $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n)$ ou $\sum(a_n, b_n)$, et on appelle S_N la N-ième somme partielle de la série. Nous dirons qu'une série S de terme général $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si les séries réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On pose alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

De même, S est absolument convergente si les séries réelles de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont.

— Si I est un ensemble non vide et $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ est une fonction, il existe un unique couple (f_1, f_2) de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ tel que $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ pour tout $t \in I$. On écrit $f = (f_1, f_2)$. Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue, dérivable, de classe $\mathcal{C}^k$, etc. en un point de I (ou sur I tout entier) si f_1 et f_2 le sont. On pose alors $f' := (f_1', f_2')$. Si $[a, b]$ est un intervalle contenu dans I, on dit que f est intégrable sur $[a,b]$ si f_1 et f_2 le sont, et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt\right).$$

Il est facile de vérifier que la dérivation et l'intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sont des opérations linéaires. De plus, si l'on définit le produit de fonctions $f = (f_1, f_2)$ et $g = (g_1, g_2)$ de I dans $\mathbb{R}^2$ par $fg = (f_1g_1, f_2g_2)$, on vérifie sans peine que si f et g sont dérivables, alors $(fg)' = f'g + fg'$. Si h est une fonction d'une variable réelle qui est dérivable et à valeurs dans I, on a aussi $(f \circ h)' = (f' \circ h)(h', h')$. Enfin, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ la fonction

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

vérifie $F' = f$.

Petit exercice : Vérifier les affirmations dans le paragraphe ci-dessus !

On peut identifier l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)). \end{array} \tag{5.1}$$

Sous cette identification, une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la suite $(\mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$, et par définition on dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Toutes les notions décrites ci-dessus pour les séries à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ s'appliquent donc aux séries complexes, $S = \sum z_n$ où $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On peut démontrer comme dans le cas réel le théorème suivant, vu en L1 :

Théorème 5.1.1 (cf. L1) *Si $S_1 := \sum a_n$ et $S_2 := \sum b_n$ sont deux séries à termes complexes a_n, b_n qui convergent absolument et ont pour limite l_1 et l_2, alors leur produit de Cauchy $S := \sum c_n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, converge absolument et a pour limite $l_1 l_2$.*

De même, les notions décrites ci-dessus pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ s'appliquent aux fonctions à valeurs complexes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et on appelle $\mathrm{Re}(f) := f_1$ et $\mathrm{Im}(f) := f_2$ la partie réelle et la partie imaginaire de f.

Exemple 5.1.2 (La fonction $t \mapsto e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$) Ce que nous venons de voir donne un sens à la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Alors une question naturelle est :

Que peut-on dire de la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $e^{it} \in \mathbb{C}$? Est-elle continue, de classe $\mathcal{C}^\infty$? Exprimable en série entière ?

Pour répondre à cette question, rappelons que par définition, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{ib} := \cos(b) + i\sin(b)\ ,\ e^{a+ib} := e^a e^{ib} = e^a\cos(b) + ie^a\sin(b).$$

À l'aide des formules trigonométriques on vérifie facilement que $e^{a+ib}e^{a'+ib'} = e^{a+a'+i(b+b')}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a (en séparant les termes pour n pair et n impair)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{5.2}$$

On reconnaît à droite les développements en séries entières de cos et sin en 0. Nous savons que ces développements convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. D'après la discussion qui précède le théorème 5.1.1 nous pouvons donc dire que la série (5.2) converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. De plus, sa somme est $\cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$. En conclusion, ceci montre que l'application $t \mapsto e^{it}$ définit une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, de développement (5.2). Elle est donc de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. En fait, via l'identification (5.1) on a

$$f'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = (-\sin(t), \cos(t)) = ie^{it}.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a

$$(e^{ikt})' = ike^{ikt}. \tag{5.3}$$

Exemple 5.1.3 (La série e^z, $z \in \mathbb{C}$, et les calculs de sommes) Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule du binôme de Newton pour développer $(a+ib)^n$ on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k (ib)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a^k (ib)^{n-k}.\end{aligned}$$

À droite on reconnaît le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!}$ (nous venons de donner un sens à cette dernière série dans l'exemple (5.1.2)). Puisque ces deux séries convergent absolument, le théorème 5.1.1 implique que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!}$ converge absolument et que sa somme vaut $e^a e^{ib} = e^{a+ib}$.

On peut donc écrire $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout nombre complexe z. En particulier, pour tout réel t on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(e^{int})}{n!} t^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{it}t)^n}{n!} \right) = \mathrm{Re}\left(e^{te^{it}} \right).$$

Maintenant $te^{it} = t\cos(t) + it\sin(t)$, donc $e^{te^{it}} = e^{t\cos(t)}(\cos(t\sin(t)) + i\sin(t\sin(t)))$. En conclusion,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n!} t^n = e^{t\cos(t)} \cos(t\sin(t)).$$

Comme exercice on peut calculer de manière analogue, par exemple, les sommes des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nt)}{n!} t^n$, ou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nt)^2}{n!} t^n$.

5.2 Les espaces $D_{2\pi}$ et $CM_{2\pi}$

Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel $t \in \mathbb{R}$ notons $f(t^+) = \lim_{x \to t^+} f(x)$ lorsque cette limite a un sens, et de même $f(t^-) = \lim_{x \to t^-} f(x)$.

On va désormais travailler avec les espaces de fonctions suivants :

$$\begin{aligned}
C_{2\pi} &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue et } 2\pi\text{−periodique}\} \\
D_{2\pi} &= \left\{ \begin{array}{c} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue par morceaux, } 2\pi\text{−periodique} \\ \text{et telle que } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \end{array} \right\} \\
CM_{2\pi} &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue par morceaux et } 2\pi\text{−periodique}\}\,.
\end{aligned}$$

Afin de bien comprendre ces définitions, rappelons d'abord qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique, $T \in \mathbb{R}$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x + T) = f(x).$$

En pratique nous utiliserons souvent le fait suivant.

Lemme 5.2.1 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(a) = f(b)$. Il existe une unique fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui soit $(b - a)$-périodique et vérifie $\tilde{f}_{|[a,b]} = f$.*

Preuve. Les propriétés de $\tilde{f}$ impliquent immédiatement son unicité. Il suffit donc de la construire. Elle est définie par $\tilde{f}(x) = f(x - n(b - a))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier relatif tel que $x - n(b - a) \in [a, b[$. En fait, $a \le x - n(b - a) < b$ implique $n(b - a) \le x - a < (n + 1)(b - a)$, soit encore $n \le \frac{x-a}{b-a} < n + 1$, donc n est la partie entière de $(x - a)/(b - a)$. □

Exemple 5.2.2 La fonction $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = f(-\pi) = f(\pi) = 0$, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$, et constante égale à -1 sur $] - \pi, 0[$, se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f} \in D_{2\pi}$. Celle-ci vérifie $\tilde{f}(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $\tilde{f}$ est constante égale à 1 (resp. -1) sur chaque intervalle $]2k\pi, (2k + 1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ (dessiner le graphe de $\tilde{f}$!).

Rappelons aussi qu'une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

du segment $[a, b]$ telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et admet une limite à gauche finie en chaque point $a_1, \ldots, a_n$, et une limite à droite finie en chaque point $a_0, \ldots, a_{n-1}$. En d'autres termes, f peut être prolongée continuement sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ (mais pas plus). On dira que la subdivision est *adaptée* à f. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux si elle l'est sur tout segment.

Une fonction T-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est alors continue par morceaux s'il existe un segment $[a, b]$ de longueur $T = b - a$ sur lequel f est continue par morceaux. C'est clair en pensant au graphe de f, mais justifions-le précisément. Supposons que cette condition est vérifiée. Tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans l'union d'un nombre fini d'intervalles translatés $[a, b] + nT$, $n \in \mathbb{Z}$. Chacun de ces intervalles est muni d'une subdivision, translatée d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Donc leur union aussi. De plus, pour tout $x \in [a, b] + nT$ on a, par T-périodicité,

$$f(x^{\pm}) = f(x^{\pm} - nT) = f((x - nT)^{\pm}).$$

Ces limites existent, donc f est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$; en particulier les limites $f(t^-)$ et $f(t^+)$ existent en tout point $t \in \mathbb{R}$. Ceci prouve notre affirmation.

Ces rappels étant faits, notons

$$V = Vect_{\mathbb{C}}\{e_k\colon t \mapsto e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{5.4}$$

ie. V est l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme $f(t) = \sum_{k \in I} c_k e_k(t)$, où $I \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble fini et $c_k \in \mathbb{C}$ pour chaque $k \in I$. D'après l'exemple 5.1.2, les fonctions e_k sont continues. On a clairement des inclusions *strictes* d'espaces vectoriels

$$V \subset C_{2\pi} \subset D_{2\pi} \subset CM_{2\pi}.$$

On appelle *fonctions de Dirichlet* les fonctions $f \in D_{2\pi}$. L'égalité $f(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$ devient triviale (ie. $f(t) = f(t)$) lorsque f est continue en t.

L'espace $D_{2\pi}$ est naturellement muni d'une structure d'espace hermitien, qui sera fondamentale dans la suite. Cette structure est explicitée dans la preuve de la proposition ci-dessous. On se place d'abord dans l'espace (plus gros) $CM_{2\pi}$. Pour tous f, $g \in CM_{2\pi}$ posons

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) g(t) dt$$

où l'on note $\bar{f}$ la fonction $t \mapsto \overline{f(t)}$. Cette expression a un sens, puisque la fonction $t \mapsto \bar{f}(t)g(t)$ est continue par morceaux et donc intégrable sur $[0, 2\pi]$. Comme elle est 2π-périodique, ses intégrales sur $[-\pi, 0]$ et sur $[\pi, 2\pi]$ sont égales (via le changement de variable $t \mapsto t + 2\pi$). Donc on peut aussi écrire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt.$$

Proposition 5.2.3 *(a) L'application $\langle\ ,\ \rangle\colon D_{2\pi} \times D_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien.*

(b) Les fonctions $e_k\colon t \mapsto e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, vérifient

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbol de Kronecker. Elles forment donc une famille $\{e_k\}_k$ orthonormée, donc libre, de l'espace hermitien $D_{2\pi}$.

Dans la suite on notera

$$||f||_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

L'application $||\cdot||_2 : D_{2\pi} \to \mathbb{R}_+$ est une *norme*, ie pour tous $f, g \in D_{2\pi}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

- $||f||_2 = 0$ implique $f = 0$,
- $||\lambda f||_2 = |\lambda|.||f||_2$,
- $||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$.

Ces propriétés découlent immédiatement du début de la preuve de la proposition. Cette norme $||\cdot||_2$, associée au produit scalaire hermitien $\langle\ ,\ \rangle$, est notée avec un indice "2" pour la distinguer de la norme sup utilisée dans les chapitres précédents.

Preuve de la proposition 5.2.3. (a) Par définition d'un produit scalaire hermitien, on doit vérifier que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme sesquilinéaire positive et non-dégénérée, c'est-à-dire que pour tous f, g, $h \in D_{2\pi}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

— $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ (*symétrie hermitienne*)
— $\langle f + \lambda g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \bar{\lambda}\langle g, h\rangle$ (*anti-linéarité à gauche*)
— $\langle f, f\rangle \geq 0$ (*positivité*)
— $\langle f, f\rangle = 0$ si, et seulement si, f est la fonction nulle (*non dégénérescence*).

Les trois premières propriétés sont assez évidentes. Passons à la dernière. Si f est nulle, clairement $\langle f, f\rangle = 0$. Réciproquement, supposons que $\langle f, f\rangle = 0$. Fixons une subdivision $-\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = \pi$ du segment $[-\pi, \pi]$ adaptée à f ; donc f, et $\bar{f}f = |f|^2$, sont continues sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. On a

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(t)|^2 dt$$

Une somme de termes positifs ou nuls est nulle si, et seulement si, chacun de ses termes est nul. Comme $\langle f, f\rangle = 0$, il s'ensuit que les intégrales dans la somme de droite sont nulles. Puisque $|f|^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, elle est nulle dessus. Donc f est nulle sur $[-\pi, \pi] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$. Par passage à la limite à gauche et à droite aux points a_j on a

$$f(a_j) = \frac{1}{2}(f(a_j^-) + f(a_j^+)) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0. \tag{5.5}$$

Donc f est nulle sur $[-\pi, \pi]$. La 2π-périodicité conclut à la nullité de f en tout point.

(b) Pour tous k, $l \in \mathbb{Z}$ on a

$$\langle e_k, e_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(l-k)t}}{i(l-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si } l \neq k \\ 1 & \text{si } l = k. \end{cases}$$

Noter qu'on a utilisé la formule (5.3) pour intégrer. Ceci prouve $\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{k,l}$, et donc les fonctions e_k sont de norme $||e_k||_2 = 1$ et sont orthogonales deux à deux : elles forment une famille orthonormée de $D_{2\pi}$ (par définition).

Enfin, toute famille orthonormée de vecteurs d'un espace hermitien est libre : dans le cas présent, si $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$ formaient une famille liée de $D_{2\pi}$, il existerait $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{k_i} = 0$. Alors l'identité

$$0 = \langle v, v \rangle = \sum_{i,j=1} \bar{\lambda}_i \lambda_j \langle e_{k_i}, e_{k_j} \rangle = \sum_{i=1} |\lambda_i|^2$$

donnerait une contradiction, puisqu'elle implique $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. □

Remarque 5.2.4 (Fonctions presque nulles) L'identité (5.5) montre le rôle de la condition "$f(t) = (f(t^-) + f(t^+))/2$" dans la définition du sous-espace $D_{2\pi}$ de $CM_{2\pi}$: si f est nulle en ses points de continuité, alors elle l'est partout (toute autre condition impliquant cette propriété conviendrait, mais celle-ci apparaîtra naturellement dans le théorème 5.4.4). Par contre, la forme $\langle\ ,\ \rangle \colon CM_{2\pi} \times CM_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est aussi sesquilinéaire et positive, mais elle est dégénérée : pour tout $f \in CM_{2\pi}$ on a $\langle f, f \rangle = 0$ si, et seulement si, pour tout intervalle borné I, l'ensemble des points $t \in I$ tels que $f(t) \neq 0$ est fini. On dit d'une telle fonction qu'elle est *presque nulle*.

Dans l'espace $D_{2\pi}$ muni de la norme $||\ ||_2$, on dit qu'une suite (f_n) converge vers $f \in D_{2\pi}$ si $\lim_{n\to+\infty} ||f - f_n||_2 = 0$. Alors la limite f est unique, car si $||f - f_n||_2 \to 0$ et $||g - f_n||_2 \to 0$, alors l'inégalité triangulaire $||f - g||_2 \leq ||f - f_n||_2 + ||g - f_n||_2$ implique $||f - g||_2 = 0$, et donc $f = g$. Mais dans $CM_{2\pi}$, si (f_n) converge vers f, alors (f_n) converge aussi vers $f + h$ pour toute fonction presque nulle h. En effet, $||f + h - f_n||_2 \leq ||f - f_n||_2 + ||h||_2$; $||h||_2 = 0$ et $||f - f_n||_2 \to 0$ impliquent donc $||f + h - f_n||_2 \to 0$. Par exemple, la suite constante nulle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle, mais aussi vers la fonction f qui vaut 1 en tout point de l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ et qui est nulle ailleurs, puisqu'on a $||f - f_n||_2 = ||f||_2 = 0$.

On peut corriger ce problème en prenant le quotient de $CM_{2\pi}$ par le sous-espace vectoriel des fonctions presque nulles ; ce quotient est bien défini, et hermitien. Ensuite on peut *compléter* ce quotient, en rajoutant des points (fonctions) de sorte que toute suite de Cauchy pour la norme $||\ ||_2$ soit convergente (de la même manière que $\mathbb{R}$ complète $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$). L' espace obtenu sera étudié (entre autres) dans le cours de théorie de la mesure et intégration, en L3.

5.3 Coefficients de Fourier, inégalité de Bessel

Soit $f \in CM_{2\pi}$.

Définition 5.3.1 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on appelle*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

le n-ième coefficient de Fourier exponentiel de f, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on appelle

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \;\; b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

les n-ièmes coefficients de Fourier trigonométriques de f. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la fonction f, on note ses coefficients de Fourier $c_n = c_n(f)$, $a_n = a_n(f)$, et $b_n = b_n(f)$.

Clairement, pour tout entier n on a

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

De plus, si f est à valeurs réelles, alors a_n et b_n sont réels, et on a $a_n = 2\mathrm{Re}(c_n)$ et $b_n = -2\mathrm{Im}(c_n) \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.3.2 *Si f est une fonction paire, pour tout entier n on a*

$$b_n = 0, \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt.$$

Si f est une fonction impaire, alors $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$.

Preuve. Si f est paire, la fonction $t \mapsto f(t)\cos(t)$ est paire, et donc par le changement de variable $t \mapsto -t$ on obtient

$$\int_{-\pi}^0 f(t)\cos(t)dt = \int_\pi^0 f(t)\cos(t)(-dt) = \int_0^\pi f(t)\cos(t)dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\cos(nt)dt &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi\right) f(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt. \end{aligned}$$

De même, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t)$ est impaire, et un calcul analogue montre que ses intégrales sur $[-\pi, 0]$ et sur $[0, \pi]$ sont opposées. Donc $b_n = 0$. Un raisonnement similaire prouve le cas où f est impaire. □

Ce lemme sera commode pour simplifier le calcul de la série de Fourier d'une fonction paire ou impaire. Pour une fonction sans propriété de parité particulière, les coefficients $c_n(f)$ doivent être privilégiés. Voir les examples 5.4.8 et 5.4.9.

Rappelons qu'une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est *de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* si f est continue, et il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et sa dérivée f' admet une limite à gauche en $a_1, \ldots, a_n$, et une limite à droite en $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Autrement dit, f' peut être prolongée continuement sur chaque intervalle *fermé* $[a_i, a_{i+1}]$.

Plus généralement, f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, $k \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[a,b]$ et il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et sa dérivée $f^{(k)}$ admet une limite à gauche en $a_1, \ldots, a_n$, et une limite à droite en $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Cette définition prolonge naturellement celle de fonction continue par morceaux sur un segment, introduite après l'exemple 5.2.2. Une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux si elle l'est sur un (donc sur tout) segment de longueur T.

Le lemme suivant, de nature technique, aura un role important dans la preuve du Corollaire 5.3.5, et surtout du Corollaire 5.4.5, fondamental.

Lemme 5.3.3 *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.*

Preuve. Par une récurrence élémentaire il suffit de prouver le cas $k = 1$. Si $n = 0$, on a par définition et 2π-périodicité $c_n(f') = (1/2\pi)[f(t)]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Si $n \neq 0$ on procède par intégration par parties :

$$c_n(f) = \left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt.$$

Le premier terme à droite est nul par 2π-périodicité, et le second est $c_n(f')$. On trouve donc l'identité de l'énoncé. □

Rappelons que $||f||_2^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ (cf. sous la proposition 5.2.3). On a :

Théorème 5.3.4 (Inégalité de Bessel) *Soit $f \in CM_{2\pi}$. On a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \tag{5.6}$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2. \tag{5.7}$$

Puisque tout fonction $f \in CM_{2\pi}$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, c'est aussi vrai de $|f|^2$ et donc $||f||_2^2 < +\infty$. Par conséquent ce théorème montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est convergente. Nous verrons plus loin que l'inégalité (5.7) est, en fait, une égalité (Théorème 5.4.6).

On ne doit pas s'effrayer de voir cette série indexée sur $\mathbb{Z}$. D'abord, l'identité (5.6) montre qu'elle s'exprime comme série indexée sur $\mathbb{N}$. Mais indépendamment de cela, on peut noter que $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, par exemple via l'application $\phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à n associe $2n$ si n est positif ou nul, et $-2n - 1$ sinon. Comme la série est à terme général positif, on peut réordonner ses termes via ϕ, de sorte à l'écrire comme somme sur $\mathbb{N}$.

Preuve. Montrons d'abord l'égalité (5.6). On a $|c_0(f)| = |a_0(f)|/2$ (par définition). De plus, pour tout entier non nul k, $c_{\pm k}(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) \mp ib_k(f))$ donne

$$\begin{aligned}|c_{\pm k}(f)|^2 &= \frac{1}{4}\left(a_k(f) \mp ib_k(f)\right)\left(\overline{a_k(f)} \pm i\overline{b_k(f)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \mp ib_k(f)\overline{a_k(f)} \pm ia_k(f)\overline{b_k(f)}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 = \tfrac{1}{2}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right)$$

et l'égalité (5.6) s'ensuit immédiatement.

Montrons l'inégalité (5.7). On va utiliser les propriétés des espaces munis de produits scalaires : c'est ici qu'il est utile de se placer dans le sous-espace $D_{2\pi}$ de $CM_{2\pi}$, qui est hermitien d'après la proposition 5.2.3. Ce n'est pas une restriction, car si $f \in CM_{2\pi}$, et $\tilde{f} \in D_{2\pi}$ est la fonction définie par

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \dfrac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8}$$

alors $c_n(f) = c_n(\tilde{f})$, car $\tilde{f}$ et f sont égales hors de l'ensemble (discret) des points de discontinuités, et donc leurs intégrales sont égales sur tout segment. On peut donc prouver (5.7) en travaillant avec $\tilde{f}$ plutôt que f, et, pour simplifier les notations, supposer tout de suite que $f \in D_{2\pi}$. Rappelons l'espace V défini dans (5.4). Soient $p \in \mathbb{N}$, et $V_p \subset V$ le sous-espace défini par

$$V_p = Vect_{\mathbb{C}}\{e_k \colon t \mapsto e^{ikt}, k = -p, \ldots, p\}. \tag{5.9}$$

Il s'ensuit de la proposition 5.2.3 (b) que V_p est de dimension $2p+1$, et que la famille de fonctions $\{e_k, k = -p, \ldots, p\}$ est une base (car génératrice et libre) orthonormée de V_p. Le produit scalaire de $D_{2\pi}$ permet de définir la projection orthogonale de $D_{2\pi}$ sur V_p : c'est l'application $\pi_p \colon D_{2\pi} \to V_p$ donnée par la formule (cf. cours d'algèbre bilinéaire)

$$\pi_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} \langle e_n, f\rangle e_n. \tag{5.10}$$

Par définition on a $\langle e_n, f\rangle = c_n(f)$. Alors les propriétés de $\langle\ ,\ \rangle$ et l'orthonormalité de la famille $\{e_k, k = -p, \ldots, p\}$ impliquent

$$||\pi_p(f)||_2^2 = \left\langle \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n, \sum_{m=-p}^{p} c_m(f)e_m \right\rangle = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2. \tag{5.11}$$

De plus, $f - \pi_p(f)$ est orthogonale à V_p, ie. $\langle f - \pi_p(f), v\rangle = 0$ pour tout $v \in V_p$ (exercice !). Comme $\pi_p(f) \in V_p$, le théorème de Pythagore nous donne

$$||f||_2^2 = ||f - \pi_p(f)||_2^2 + ||\pi_p(f)||_2^2 \geq ||\pi_p(f)||_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2.$$

L'inégalité étant valable pour tout entier relatif p, elle prouve l'inégalité (5.7). □

Corollaire 5.3.5 *Les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ convergent vers 0 (pour $n \to +\infty$, $n \to \pm\infty$ respectivement). De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, alors*

$$c_n(f) = o(n^{-k}), n \to +\infty,$$

et de même pour $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Preuve. D'après l'inégalité (5.7) la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge, donc la suite réelle $(|c_n(f)|)$ converge vers 0. Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, alors $f^{(k)}$ est continue par morceaux, et en lui appliquant à son tour l'inégalité (5.7) on obtient $c_n(f^{(k)}) \to 0$, $n \to +\infty$. Comme $(in)^k c_n(f) = c_n(f^{(k)})$ (Lemme 5.3.3), le résultat s'ensuit. Même argument pour $a_n(f)$ et $b_n(f)$. □

5.4 Séries de Fourier, théorèmes de Dirichlet et Parseval

Soit $f \in CM_{2\pi}$.

Définition 5.4.1 *Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-ième somme partielle de Fourier exponentielle de f, et p-ième somme partielle de Fourier trigonométrique de f, les sommes :*

$$\begin{aligned} S_p(f)(t) &= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e^{int} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

On note

$$S(f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$$

et on appelle série de Fourier de f en $t \in \mathbb{R}$, la limite, lorsqu'elle existe, de la suite complexe $(S_p(f)(t))_{p\in\mathbb{N}}$.

Afin de bien comprendre cette définition, justifions d'abord l'égalité (5.12). On a $c_0(f) = a_0(f)/2$. De plus, pour tout $n \neq 0$, en collectant les parties réelles et imaginaires de $c_n(f)e^{int}$ on trouve :

$$\begin{aligned} c_n(f)e^{int} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{(\cos(nx) - i\sin(nx))}_{=e^{-inx}} dx\right) (\cos(nt) + i\sin(nt)) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right) + \frac{i}{2}\left(a_n(f)\sin(nt) - b_n(f)\cos(nt)\right). \end{aligned}$$

mais $a_{-n}(f) = a_n(f)$ et $b_{-n}(f) = -b_n(f)$ impliquent

$$\sum_{n=-p,\neq 0}^{p} a_n(f)\sin(nt) = \sum_{n=-p,\neq 0}^{p} b_n(f)\cos(nt) = 0$$

ce qui prouve (5.12).

Ensuite, on peut donner une interprétation géométrique des sommes de Fourier partielles $S_p(f)$ lorsque $f \in D_{2\pi}$. En effet, d'après l'identité (5.10) on a :

Lemme 5.4.2 *Pour tout $f \in D_{2\pi}$ la p-ième somme de Fourier $S_p(f)$ est la projection orthogonale de f sur V_p.*

Enfin, la série de Fourier $S(f)$, lorsqu'elle existe, est évidemment un exemple de *série trigonométrique*, ie. une série complexe de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$, où $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'usage de ce qualificatif "trigonométrique" est justifié par le fait que

$$V = Vect_{\mathbb{C}}\{e_k \colon t \mapsto e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\} = Vect_{\mathbb{C}}\{\cos(kt), \sin(kt), k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble des séries trigonométriques forme un espace vectoriel complexe. Le résultat suivant dit que celles qui convergent uniformément sont des séries de Fourier de fonctions $f \in CM_{2\pi}$:

Proposition 5.4.3 *Soient $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ une série trigonométrique convergeant uniformément, et $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa somme. Alors f est continue 2π-périodique, et on a $c_n = c_n(f)$. Autrement dit, S est la série de Fourier de sa somme f.*

Preuve. Les sommes partielles de la série S sont continues, donc sa somme f l'est aussi d'après les résultats que nous avons vus dans le chapitre sur les séries de fonctions. La 2π-périodicité se prouve par passage à la limite :

$$f(t+2\pi) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in(t+2\pi)}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}\right) = f(t).$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}\right)e^{-int}dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt}_{2\pi\delta_{k,n}} = c_n
\end{aligned}$$

On a utilisé la convergence uniforme de S pour échanger les signes somme et intégrale dans la troisième égalité. $\square$

Réciproquement, on a :

Théorème 5.4.4 (Dirichlet) *soit $f \in CM_{2\pi}$, et $S(f)(t_0)$ la série de Fourier de f en un point $t_0 \in \mathbb{R}$. Si $t_0 \in \mathbb{R}$ est tel que les limites*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0-h)-f(t_0^-)}{h}, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0^+)}{h} \tag{5.13}$$

existent et sont finies, alors $S(f)(t_0)$ converge vers $(f(t_0^-)+f(t_0^+))/2$. En particulier, si **de plus** *f est continue en t_0, ou bien $f \in D_{2\pi}$, alors*

$$f(t_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int_0} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(nt_0) + b_n(f)\sin(nt_0)\right).$$

Lorsque f est continue en t_0, l'hypothèse (5.13) signifie l'existence de dérivées finies à gauche et à droite en t_0 (car alors $f(t_0^{\pm}) = f(t_0)$). C'est donc une hypothèse de régularité. Le théorème nous dit qu'*en tout point où cette hypothèse est vérifiée*, la série $S(f)$ converge *simplement* vers la fonction $\tilde{f} \in D_{2\pi}$ associée à f, comme dans (5.8).

Avant de prouver le théorème, tirons-en une première conséquence remarquable : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème s'applique en tout point t_0. En fait, sous cette hypothèse plus forte on a :

Corollaire 5.4.5 *Si $f \in CM_{2\pi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $S(f)$ converge normalement vers f.*

Preuve. On a $||c_n(f)e^{int}|| = |c_n(f)|$, donc nous devons montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. On aimerait appliquer l'inégalité de Bessel (5.7)...mais elle n'implique que la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, et pas, en général, celle de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$.

Pour montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, on va vérifier que son terme général tend assez rapidement vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (penser au critère de Riemann). Pour cela, on utilise le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : sa dérivée f' définit une fonction dans $CM_{2\pi}$, donc l'inégalité (5.7) est valide pour f' également, et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2$ converge ; on va comparer cette série avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ en utilisant le lemme 5.3.3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left(1 - n^2|c_n(f)|\right)^2 \geq 0$, donc en développant on obtient $1 + n^4|c_n(f)|^2 \geq 2n^2|c_n(f)|$. Comme $|c_n(f)|^2 = |c_n(f')|^2/n^2$, il s'ensuit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right) \geq |c_n(f)|.$$

Comme discuté plus haut, le membre de gauche est le terme général d'une série convergente, ce qui conclut la preuve. □

Preuve de Dirichlet. On transforme d'abord les sommes partielles $S_p(f)(t)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{int} &= \sum_{n=-p}^{p} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)e^{int}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{n=-p}^{p} e^{in(t-x)}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy. \qquad (5.14)\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière égalité on a utilisé le changement de variable $t-x=y$ (noter aussi l'échange des bornes), et dans la dernière égalité, le fait que la fonction à intégrer est 2π-périodique pour translater les bornes, ce qui donne formellement $\int_{t-\pi}^{-\pi} = \int_{t+\pi}^{\pi}$ et donc $\int_{t-\pi}^{t+\pi} = \int_{t-\pi}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{t+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$.

En découpant l'intégrale (5.14) en une intégrale entre $-\pi$ et 0 et une intégrale entre 0 et π, puis en faisant le changement de variable $y \mapsto -y$ dans la première de ces deux intégrales (en notant que la somme ne change pas puisque e^{iny} y devient e^{-iny}), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy + \int_{0}^{\pi} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(t+y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy + \int_{0}^{\pi} f(t-y)\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy\right).\end{aligned}$$

Maintenant, on note que

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy = \pi + \sum_{n=-p,\neq 0}^{p}\left[\frac{e^{iny}}{in}\right]_0^{\pi} = \pi$$

car

$$\left[\frac{e^{iny}}{in}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ si } n \text{ est pair}\\ -\dfrac{2}{in} & n \text{ si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

Alors on peut écrire, en prenant pour t le point t_0 tel que dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{int_0} - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2} =\\ &\qquad \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(f(t_0+y)-f(t_0^+))\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy\right.\\ &\qquad\qquad \left.+\int_0^{\pi}(f(t_0-y)-f(t_0^-))\sum_{n=-p}^{p} e^{iny}dy\right).\end{aligned}$$

On a déjà rencontré l'identité $\sin(\frac{y}{2}) \sum_{n=-p}^{p} e^{iny} = \sin((p + \frac{1}{2})y)$. Comme

$$\frac{f(t_0 + y) - f(t_0^+)}{\sin(y/2)} = \frac{f(t_0 + y) - f(t_0^+)}{y} \cdot \frac{y}{\sin(y/2)}$$

et $\lim\limits_{y\to 0^+} y/\sin(y/2) = 2$, l'hypothèse du théorème entraîne que la fonction

$$y \mapsto \frac{f(t_0 + y) - f(t_0^+)}{\sin(y/2)}$$

a une limite finie lorsque $y \to 0^+$, et donc se prolonge par continuité en 0. Il en va de même pour la fonction $y \mapsto (f(t_0 - y) - f(t_0^-))/\sin(y/2)$. Notons g_1 et g_2 les prolongements continus en 0 de ces fonctions. Comme f est continue par morceaux, g_1 et g_2 le sont aussi. D'après l'exercice 5 de la feuille de TD4, on a pour toute fonction continue g sur $[0, \pi]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0.$$

Donc

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e^{int_0} - \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} g_1(y) \sin((p + \frac{1}{2})t) dy + \int_0^{\pi} g_2(y) \sin((p + \frac{1}{2})t) dy \right)$$

tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, ce qui achève la preuve. □

Théorème 5.4.6 (Parseval) *Pour toute fonction $f \in CM_{2\pi}$ on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2. \tag{5.15}$$

Preuve. On va d'abord prouver le théorème en supposant que f est continue. On procède en suivant les étapes (i) à (iii) ci-dessous, qui s'achèvent avec l'identité (5.21).

(i) Montrons que f est limite uniforme de polynômes trigonométriques : il suffit de montrer que si $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $v \in V_N$ tels que

$$||f - v|| < \epsilon \tag{5.16}$$

(cf. (5.9) pour la définition de V_N). Dans un premier temps, on peut approximer f par une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. En fait, on peut même choisir h affine par morceaux. Pour cela, comme d'habitude on définit h sur $[0, 2\pi]$ telle que $h(0) = h(2\pi)$, et on prolonge h sur $\mathbb{R}$ via le lemme 5.2.1. Pour définir h sur $[0, 2\pi]$, comme f est continue elle est uniformément continue (théorème de Heine), et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous x, $y \in [0, 2\pi]$, $|x - y| < 2\pi/n$ implique

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon/4. \tag{5.17}$$

Alors on pose

$$h(2k\pi/n) = f(2k\pi/n)$$

pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, et on prolonge h sur chaque intervalle $I_k = [2k\pi/n, 2(k+1)\pi/n]$ comme fonction affine, ie. de la forme $t \mapsto at + b$. Alors pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, et tous t, $t' \in I_k$, on a

$$|h(t) - h(t')| \leq |\underbrace{h(2(k+1)\pi/n) - h(2k\pi/n)}_{=f(2(k+1)\pi/n) - f(2k\pi/n)}| < \epsilon/4$$

où la seconde inégalité est conséquence de (5.17), et la première du fait que h est affine sur I_k. Par inégalité triangulaire et (5.17) à nouveau, on en déduit, pour tout $x \in I_k$,

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - f(2k\pi/n)| + |\underbrace{f(2k\pi/n)}_{=h(2k\pi/n)} - h(x)| < \epsilon/2.$$

Ceci étant vrai pour tous les intervalles I_k, il s'ensuit que

$$||f - h|| < \epsilon/2. \tag{5.18}$$

Comme h est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, on peut lui appliquer le corollaire 5.4.5 : la série de Fourier $S(h)$ converge normalement vers h, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $||h - S_N(h)|| < \epsilon/2$. Alors $v := S_N(h) \in V_N$ vérifie l'inégalité (5.16) :

$$||f - S_N(h)|| \leq ||f - h|| + ||h - S_N(h)|| < \epsilon. \tag{5.19}$$

(ii) Montrons que $||f - \pi_N(f)||_2$ est la distance de f au sous-espace V_N de $C_{2\pi}$, où $\pi_N \colon D_{2\pi} \to V_N$ est la projection orthogonale. C'est-à-dire :

$$||f - \pi_N(f)||_2 = \inf_{w \in V_N} \{||f - w||_2\}.$$

C'est un résultat fondamental du cours d'algèbre bilinéaire, mais rappelons-en une démonstration. Pour tout $w \in V_N$ on a $\pi_N(f) - w \in V_N$, donc $\langle f - \pi_N(f), \pi_N(f) - w \rangle = 0$ (cf preuve de l'inégalité de Bessel, (5.7)). Alors par Pythagore,

$$||f - w||_2^2 = ||w - \pi_N(f)||_2^2 + ||f - \pi_N(f)||_2^2 \geq ||f - \pi_N(f)||_2^2$$

ce qui prouve notre affirmation.

(iii) Par l'inégalité de la moyenne on a $||f - S_N(h)||_2^2 \leq ||f - S_N(h)||^2$. Alors en utilisant (ii), puis (i) et le fait que $S_N(h) \in V_N$, on en déduit que

$$||f - \pi_N(f)||_2^2 \leq ||f - S_N(h)||_2^2 < \epsilon^2. \tag{5.20}$$

Finalement, on a

$$\mathrm{Re}\left(\langle f, \pi_N(f)\rangle\right) \leq |\langle f, \pi_N(f)\rangle| \leq ||f||.||\pi_N(f)||$$

(la seconde inégalité est celle de Cauchy-Schwartz), et par conséquent

$$\begin{aligned}||f - \pi_N(f)||_2^2 &= ||f||_2^2 + ||\pi_N(f)||_2^2 - 2\mathrm{Re}\left(\langle f, \pi_N(f)\rangle\right) \\ &\geq ||f||_2^2 + ||\pi_N(f)||_2^2 - 2||f||.||\pi_N(f)|| = (||f||_2 - ||\pi_N(f)||_2)^2.\end{aligned}$$

Donc (5.20) implique $|\ ||f||_2 - ||\pi_N(f)||_2\ | < \epsilon$. Comme ϵ est quelconque, avec (5.11) on en déduit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \lim_{N\to+\infty} ||\pi_N(f)||_2^2 = ||f||_2^2. \tag{5.21}$$

Ceci achève la preuve lorsque f est continue.

Si f n'est pas continue, mais seulement continue par morceaux, il n'existe pas de fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux vérifiant l'inégalité (5.18), donc (5.19), pour tout $\epsilon > 0$. L'étape (ii) ne dépend pas de la norme sup, $||\ ||$, et dans l'étape (iii) tout repose sur l'inégalité (5.20), qu'on a déduit de (5.19). On va donc modifier l'étape (i), en remplaçant (5.19) par l'inégalité analogue en $||\ ||_2$, de sorte à obtenir à nouveau l'inégalité (5.20).

D'abord, il existe des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que $||f - h||_2 < \epsilon/2$. Par exemple, l'intégrabilité de f au sens de Riemann garantit l'existence de fonctions en escalier $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$ telles que $||\psi_i - f||_2 \leq ||\psi_1 - \psi_2||_2 < \epsilon/4$, et on peut définir h continue et affine par morceaux en modifiant ψ_1 (par exemple) au voisinage de ses points de discontinuité de sorte que $||\psi_1 - h||_2 < \epsilon/4$. Alors

$$||f - h||_2 \leq ||f - \psi_1||_2 + ||\psi_1 - h||_2 < \epsilon/2. \tag{5.22}$$

Comme h est continue, elle vérifie l'égalité (5.21), et il en est de même de $h - S_N(h)$, pour tout entier N. Alors

$$||h - S_N(h)||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(h - S_N(h))|^2 = \sum_{|n|>N} |c_n(h - S_N(h))|^2$$

où l'on observe que les termes pour $|n| \leq N$ s'annulent, car

$$\begin{aligned}c_n(h - S_N(h)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (h(t) - S_N(h)(t))e^{-int}dt \\ &= c_n(h) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} c_k(h) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt}_{2\pi\delta_{k,n}} = 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $||h - S_N(h)||_2^2$ est le reste d'une série convergente (par l'inégalité de Bessel), donc il existe N assez grand tel que

$$||h - S_N(h)||_2 < \epsilon/2. \tag{5.23}$$

En conclusion, en remplaçant (5.18) par (5.22) et en utilisant (5.23), on obtient l'inégalité $||f - S_N(h)||_2 < \epsilon$ en lieu et place de (5.19). Comme indiqué plus haut, la preuve de (5.21) peut ensuite être achevée en reproduisant l'étape (iii) à partir de (5.20). $\square$

Remarque 5.4.7 L'inégalité (5.23), qui est valide pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction continue et 2π-périodique h, démontre que h est limite de la suite $(S_N(h))_{N\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $C_{2\pi}$ muni de la norme $||\ ||_2$. Nous en déduisons ici une autre propriété. Pour toutes fonctions $f, g \in C_{2\pi}$ on a

$$\langle S_N(f), S_N(g)\rangle = \textstyle\sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k(f)}c_k(g).$$

De plus $|\langle f - S_N(f), g\rangle| \leq ||f - S_N(f)||_2.||g||_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et d'après (5.23), $||f - S_N(f)||_2$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{N\to+\infty}\langle f - S_N(f), g\rangle = 0$, et $\lim_{N\to+\infty}\langle S_N(f), g - S_N(g)\rangle = 0$ pour la même raison. Alors l'identité

$$\langle f, g\rangle = \langle f - S_N(f), g\rangle + \langle S_N(f), g - S_N(g)\rangle + \langle S_N(f), S_N(g)\rangle$$

implique, par passage à la limite $N \to +\infty$,

$$\langle f, g\rangle = \lim_{N\to+\infty}\langle S_N(f), S_N(g)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)}c_k(g).$$

En conclusion, nous obtenons ici que $||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \lim_{N\to+\infty} ||S_N(f)||_2$.

Exemple 5.4.8 Soit $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(0) = f(-\pi) = f(\pi) = 0$, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$, et constante égale à -1 sur $]-\pi, 0[$; nous avons vu dans l'exemple 5.2.2 que f se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f} \in D_{2\pi}$. On peut donc lui appliquer les théorèmes de Dirichlet et Parseval. Par contre, $\tilde{f}$ n'est pas continue, donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et on ne peut pas lui appliquer le corollaire 5.4.5.

Comme f est impaire, pour tout entier n on a $a_n(f) = 0$, et si $n \neq 0$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{\pi(2p-1)} & \text{si } n = 2p-1. \end{cases}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p-1}\sin((2p-1)t).$$

Par exemple, en prenant $t = \pi/2$ on déduit la formule

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}.$$

Notons ici que cette série ne converge pas normalement, ce qui montre que l'hypothèse du corollaire 5.4.5 est bien nécessaire. De plus $||f||_2^2 = 1$, et alors Parseval nous donne

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2} = 1.$$

Exemple 5.4.9 (...et exercice !) Soit α un réel non nul, et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$. On a

$$c_n(f) = \frac{(-1)^n \sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha - in)},$$

donc $|c_n(f)|^2 = |c_{-n}(f)|^2 = \dfrac{\sinh(\alpha\pi)^2}{\pi^2(\alpha^2+n^2)}$, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\sinh(2\alpha\pi)}{\alpha}.$$

Alors Parseval implique :

$$\frac{\sinh(\alpha\pi)^2}{\pi^2\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha\pi)^2}{\pi^2(\alpha^2+n^2)} = \frac{\sinh(2\alpha\pi)}{2\alpha\pi}$$

soit encore, en multipliant par $\pi^2/2\sinh(\alpha\pi)^2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi}{2\alpha\tanh(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Notons que le membre de gauche est une fonction continue de $\alpha \in \mathbb{R}$.