Analyse 2 (HAX201X)

Correction du CC n°1

Questions de cours (12.5 points)

1. **Montrer, à l'aide de la définition, qu'une suite convergente est bornée.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors par définition on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire $l - \varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon + l$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit :

$$|u_n| \leq \varepsilon + |l|, \quad \forall n \geq N.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang N mais il reste à montrer qu'elle est bornée pour $0 \leq n < N$. Pour cela, il faut regarder l'ensemble

$$\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|\}$$

qui contient un nombre fini d'éléments donc on peut définir $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|\}$. On a donc

$$|u_n| \leq M, \quad \forall\ 0 \leq n < N - 1$$

et donc

$$|u_n| \leq \max\{\varepsilon + |l|, M\}$$

pour tout $n \geq 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. **Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes respectivement vers $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide de la définition que $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$.**
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - \alpha| \leq \varepsilon$$

et par définition de la convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |b_n - \beta| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ on a à la fois $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$ et $|b_n - \beta| \leq \varepsilon$. On obtient donc

$$|a_n - \alpha||b_n - \beta| \leq \varepsilon^2$$

c'est-à-dire

$$|(a_n - \alpha)(b_n - \beta)| \leq \varepsilon^2.$$

On peut essayer de développer :

$$|a_n b_n - \alpha b_n - \beta a_n + \alpha\beta| \leq \varepsilon^2$$

mais on voit vite que l'on est bloqué. Il faut donc regrouper les termes astucieusement en écrivant :

$$|a_n b_n - \alpha(b_n - \beta) - \beta(a_n - \alpha) - \alpha\beta| \leq \varepsilon^2.$$

C'est-à-dire :

$$|a_n b_n - \alpha\beta - (\alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha))| \leq \varepsilon^2.$$

On se rappelle de l'inégalité triangulaire $|A - B| \geq |A| - |B|$ appliquée ici à $A = a_n b_n - \alpha\beta$ et $B = \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)$ qui nous donne :

$$|a_n b_n - \alpha\beta| - |\alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \leq \varepsilon^2$$

et donc
$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq |\alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| + \varepsilon^2.$$
On en déduit alors que
$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq |\alpha||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|| + \varepsilon^2$$
et donc
$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon + \varepsilon^2$$
pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Pour terminer la preuve, il faut montrer (par définition) que $\forall\overline{\varepsilon} > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_nb_n - \alpha\beta| \leq \overline{\varepsilon}$ pour tout $n \geq N$. On pose donc $\overline{\varepsilon} > 0$, et il faut remarquer que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$
Donc en considérant $\varepsilon > 0$ assez petit (c'est-à-dire tel que $|\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \overline{\varepsilon}$) on obtient bien $|a_nb_n - \alpha\beta| \leq \overline{\varepsilon}$ pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$.

3. **Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante. On considère une suite (V_n) définie par la récurrence $V_0 \in \mathbb{R}$ et $V_{n+1} = G(V_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont monotones.**

   Puisque G est décroissante alors la fonction $G \circ G$ est croissante. On note $a_n = V_{2n}$ et $b_n = V_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$. On remarque que
$$a_{n+1} = V_{2n+2} = G(V_{2n+1}) = (G \circ G)(V_{2n}) = (G \circ G)(a_n)$$
   et de même
$$b_{n+1} = (G \circ G)(b_n).$$
   On en déduit que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont monotones. En effet, on peut montrer par récurrence que si $a_1 \geq a_0$ alors $a_{n+1} = (G \circ G)(a_n) \geq (G \circ G)(a_{n-1}) = a_n$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De même, si $a_1 \leq a_0$ alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. **Exhiber une suite qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, mais qui n'est pas convergente.**

   De nombreux exemples sont possibles. Typiquement, les suites de la forme :
$$u_n = \begin{cases} \alpha & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
   où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ marche car la sous-suite $u_{2n} = \alpha$ converge vers α alors que la sous-suite $u_{2n+1} = f(2n+1) \to +\infty$ ne converge pas.

5. **Donner la définition d'une suite de Cauchy. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.**

   • Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :
$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N : |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$
   • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $p, q \geq N$, on a
$$|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire $|A + B| \leq |A| + |B|$. Ce qui est exactement la définition de suite de Cauchy.

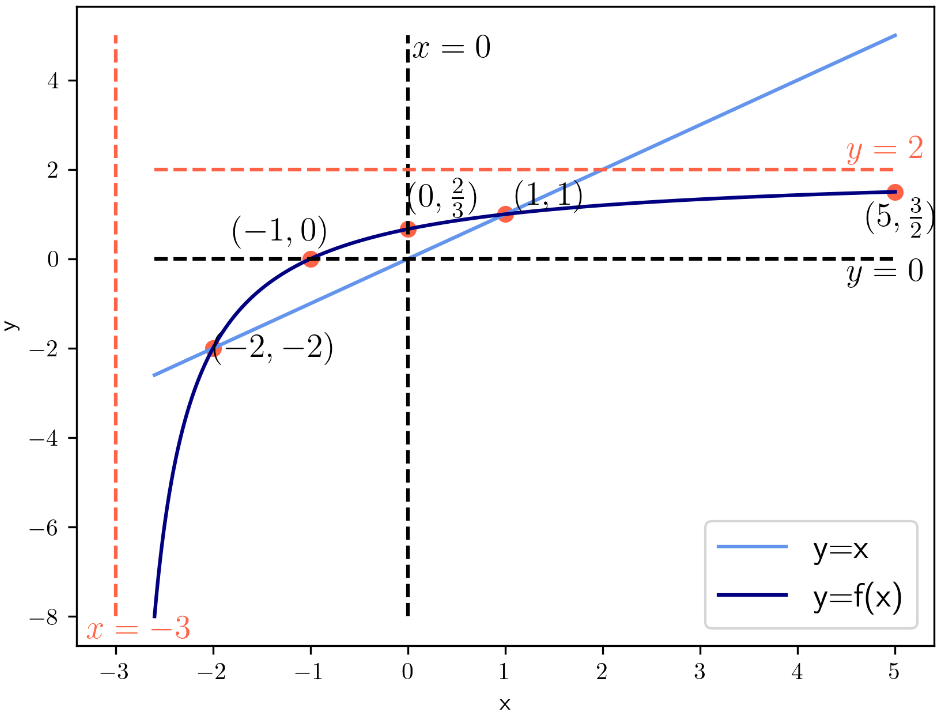
Exercice (12 points)

On considère la fonction $f :]-3,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}.$$

On étudie la suite (U_n) définie par la récurrence $U_0 \geq -2$ et $U_{n+1} = f(U_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. **Tracer le graphe de f et déterminer sa position par rapport à la droite $y = x$.**
Voir figure ci-contre.



Pour étudier la position de f par rapport à la droite $y = x$, il faut regarder le signe de $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x+3} = \frac{(1-x)(x+2)}{x+3}.$$

Ainsi sur $]-3,+\infty[$, on voit que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2, 1]$ et $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-3,-2] \cup [1,+\infty[$. Donc f est au-dessus (respectivement au-dessous) de la droite $y = x$ sur l'intervalle $[-2, 1]$ (resp. $]-3,-2] \cup [1,+\infty[$).

2. **Vérifier que $f([-2,+\infty[) \subset [-2,+\infty[$. En déduire que la suite (U_n) est bien définie.**
On remarque que f est une fonction continue et même dérivable sur $]-3,+\infty[$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x+2)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} > 0 \quad \forall x > -3$$

donc en particulier $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [-2,+\infty[$ donc f est croissante sur l'intervalle $[-2,+\infty[$. Or $f(-2) = -2$ donc il est clair que $f(x) \geq -2$ pour tout $x \geq -2$. Autrement dit on a bien $f([-2,+\infty[) \subset [-2,+\infty[$.
Puisque $U_0 \geq -2$ et que $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \geq 0$ avec $f(x) \geq -2$ pour tout $x \geq -2$, il est clair, par récurrence immédiate, que pour tout $n \geq 0$, U_n est bien défini avec $U_n \geq -2$.

3. **Montrer que la suite (U_n) est monotone. Préciser pour quelles valeurs de $U_0 \in [-2,+\infty[$ la suite est croissante, respectivement décroissante.**

D'après la question précédente, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie avec $U_n \geq -2$ pour tout $n \geq 0$. Or pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est croissante sur $[-2, +\infty[$. Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Pour savoir si elle est croissante ou décroissante, il faut étudier le signe de $U_1 - U_0$, c'est-à-dire de $f(U_0) - U_0$ et donc le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$. Or, on sait d'après la question 1 que $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [-2, 1]$ et $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Autrement dit :
• si $U_0 \in [-2, 1]$ alors $U_1 = f(U_0) \geq U_0$ et par récurrence on a $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout $n \geq 0$ donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• si $U_0 \in [1, +\infty[$ alors $U_1 = f(U_0) \leq U_0$ et par récurrence on a $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout $n \geq 0$ donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. **Montrer que la suite (U_n) est convergente.**
On remarque dans un premier temps que $f(1) = 1$ et comme f est continue et strictement croissante sur $[-2, +\infty[$ on a $f([-2, 1]) = [-2, 1]$ et $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, on a en fait $f([1, +\infty[) = [1, 2[$. On en déduit alors que :
• si $U_0 \in [-2, 1]$ alors $U_1 = f(U_0) \leq 1$ et par récurrence on a $U_n \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. Donc la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est majorée et est croissante d'après la question précédente donc elle est convergente.
• si $U_0 \in [1, +\infty[$ alors $U_1 = f(U_0) \geq 1$ et par récurrence on a $U_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. Donc la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est minorée et est décroissante d'après la question précédente donc elle est convergente.

On pourrait montrer (mais ce n'était pas demandé) dans les deux cas que la suite converge vers un $l \in \mathbb{R}$ satisfaisant $l = f(l)$ ce qui revient à $l = -2$ ou $l = 1$:
• si $U_0 = -2$ alors $U_n = -2$ pour tout $n \geq 0$ donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2
• si $U_0 \in [1, +\infty[$ alors $U_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$ donc $l \geq 1$. Forcément $l = 1$ et donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
• si $U_0 \in]-2, 1]$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $U_n \geq U_0 > -2$ pour tout $n \geq 0$. On peut ainsi démontrer par l'absurde que l'on a obligatoirement $l = 1$ (sinon pour n assez grand on obtiendrait $U_n \leq U_0$ pour avoir $|U_n - (-2)| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $-2 - \varepsilon \leq U_n \leq -2 + \varepsilon$ et $-2 + \varepsilon < U_0$ pour $\varepsilon < U_0 + 2$).

5. **Dans cette question, on suppose que $U_0 = 2$.**
   (1) **Montrer que $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|, \ \forall n \in \mathbb{N}$.**
   Calculons dans un premier temps $|U_{n+1} - 1|$:
$$|U_{n+1} - 1| = |f(U_n) - 1| = \left|\frac{2U_n + 2}{U_n + 3} - 1\right| = \left|\frac{U_n - 1}{U_n + 3}\right| = \frac{|U_n - 1|}{|U_n + 3|}.$$
   Mais puisque $U_0 = 2 \in [1, +\infty[$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 d'après la question 4, autrement dit $U_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit alors que
$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|.$$
   (2) **En déduire que $|U_n - 1| \leq 4^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.** On va le démontrer par récurrence sur $n \geq 0$. On voit que l'initialisation est vérifiée pour $n = 0$ car on a
$$|U_0 - 1| = |2 - 1| = 1 = 4^{-0}.$$
   Supposons ensuite que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $|U_n - 1| \leq 4^{-n}$. Alors
$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1| \leq 4^{-(n+1)}$$
   où l'on a utilisé la question 5.1 pour la première inégalité.
   (3) ***Question bonus* : calculer la limite de la suite $V_n = n\ln(U_n)$.**
   On sait que $U_0 = 2$. Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente d'après la question 4. On démontre que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$ (voir la correction à la question 4). Il faut maintenant se rappeler (c'était l'exercice 2 du TD) que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h(U_n) - h(1)}{U_n - 1}\right) = h'(1)$$

pour tout fonction $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 1. Ici on considère la fonction $h(x) = \ln(x)$ qui est bien dérivable en 1. On obtient ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(U_n) - \ln(1)}{U_n - 1} \right) = 1.$$

Par définition de cette convergence, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \left| \frac{\ln(U_n)}{U_n - 1} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\ln(U_n)}{U_n - 1} \leq \varepsilon + 1$$

donc $\ln(U_n) \leq (1+\varepsilon)(U_n - 1)$ pour tout $n \geq N$. Considérons par exemple $\varepsilon = 1$ pour simplifier les calculs, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ln(U_n) \leq 2(U_n - 1)$$

pour tout $n \geq N$. On en déduit alors que

$$|n \ln(U_n)| \leq |2n(U_n - 1)| \leq 2n|U_n - 1| \leq 2n\ 4^{-n}$$

pour tout $n \geq N$ où l'on s'est servi de la question 5.2. Mais puisque

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\ 4^{-n} = 0$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} |n \ln(U_n)| = \lim_{n\to+\infty} |V_n| = 0$$

autrement dit la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.