**CC du 14 mars 2023**
**Durée : 1 h 10**

*Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.*

*Documents, calculettes et téléphones portables interdits.*

## Questions de cours (12 points)

**1.** Montrer, à l'aide de la définition, qu'une suite convergente est bornée.

**2.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes respectivement vers $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide de la définition que $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$.

**3.** Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *décroissante*. On considère une suite $(V_n)$ définie par la récurrence $V_0 \in \mathbb{R}$ et $V_{n+1} = G(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que les sous-suites $(V_{2n})$ et $(V_{2n+1})$ sont monotones.

**4.** Exhiber une suite qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, mais qui n'est pas convergente.

**5.** Donner la définition d'une suite de Cauchy. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

## Exercice (12 points)

On considère la fonction $f : ]-3, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}.$$

On étudie la suite $(U_n)$ définie par la récurrence $U_0 \geq -2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**1.** Tracer le graphe de $f$ et déterminer sa position par rapport à la droite $y = x$.

**2.** Vérifier que $f([-2, +\infty[) \subset [-2, +\infty[$. En déduire que la suite $(U_n)$ est bien définie.

**3.** Montrer que la suite $(U_n)$ est monotone. Préciser pour quelles valeurs de $U_0 \in [-2, +\infty[$ la suite est croissante, respectivement décroissante.

**4.** Montrer que la suite $(U_n)$ est convergente.

**5.** Dans cette question on suppose que $U_0 = 2$.

(1) Montrer que $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(2) En déduire que $|U_n - 1| \leq 4^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) *Question bonus* : calculer la limite de la suite $V_n = n\ln(U_n)$.