L2 Mathématiques — Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 — Année universitaire 2022-2023

Contrôle continu 1
Jeudi 9 mars 2023

Documents et appareils électroniques sont interdits et doivent être rangés.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.

Durée : 75 minutes.

Exercice 1 **(Questions de cours & TD, 3 points)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f.

1. On suppose dans cette question que f et les fonctions f_n sont continues. Donner un exemple d'une telle suite (f_n) qui ne converge pas uniformément.
2. Montrer que si $g\colon I \to \mathbb{R}$ est un fonction bornée et (f_n) converge uniformément, alors (gf_n) converge uniformément vers gf.
3. Montrer que si (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, alors (f_n) converge uniformément.

Exercice 2 **(6 points)** Pour les deux suites de fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies ci-dessous, déterminer s'il y a convergence simple, convergence uniforme, et convergence uniforme sur les compacts :

1. $f_n(x) = x + \sqrt{x}\sin(\frac{x}{n})$, pour $I = [0, +\infty[$;
2. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, pour $I = [0, 1]$, puis pour $I =]0, 1]$.

Exercice 3 **(6 points)** Pour les deux suites de fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, définies ci-dessous, déterminer s'il y a convergence uniforme :

1. $f_n(x) = n(1-x)^n \sin(\frac{\pi x}{2})$, pour $I = [0, 2]$;
2. $f_n(x) = (\cos(\frac{x}{n}))^n$, pour $I = [0, 1]$.

Exercice 4 **(5 points)** Pour $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq 1$, on considère la suite d'intégrales

$$I_n(a) = \int_a^1 \frac{n^2 e^{-nx}}{n^2 + x} \sin(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que si $0 < a \leq 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a
$$|I_n(0)| \leq \varepsilon + \varepsilon.$$
Que pouvez-vous en déduire ?