Correction CC1

Ex 1 cf poly page 12-13 méthode du point-milieu
c'est un schéma à un pas d'ordre 2 car l'erreur de consistance est en $O(h^3)$.
Le fait que $\phi(t,y,h) = f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y))$ soit lipschitz % à la variable y est aisé à prouver :

$$|\phi(t,y,h)-\phi(t,z,h)| = |f(t+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(t,y)) - f(t+\tfrac{h}{2}, z+\tfrac{h}{2}f(t,z))|$$
$$\leq L\,|y+\tfrac{h}{2}f(t,y) - z - \tfrac{h}{2}f(t,z)| \leq L|y-z| + \frac{Lh}{2}|f(t,y)-f(t,z)|$$
$$\leq L|y-z| + \frac{L^2h}{2}|y-z| \leq \left(L+\frac{L^2h}{2}\right)|y-z|$$

donc $\phi(t,\cdot,h)$ est lipschitz de rapport $M = L + \frac{L^2h}{2}$.

Ex 2 l'erreur de consistance est

1- $$\mathcal{E}(h) := \frac{11}{6}y(t_{n+1}) - 3y(t_n) + \frac{3}{2}y(t_{n-1}) - \frac{1}{3}y(t_{n-2}) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

Soit $\rho(z) = \frac{11}{6}z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}$; $\rho'(z) = \frac{11}{2}z^2 - 6z + \frac{3}{2}$

$\sigma(z) = z^3$

$$\rho(1) = \frac{11}{6} - 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11-18+9-2}{6} = 0$$

$$\rho'(1) = \frac{11}{2} - 6 + \frac{3}{2} = \frac{14}{2} - 6 = 1 = \sigma(1)$$

D'après une proposition du cours, le schéma est consistant.

2- $$\mathcal{E}(h) = \frac{11}{6}y(t_n+h) - 3y(t_n) + \frac{3}{2}y(t_n-h) - \frac{1}{3}y(t_n-2h) - hy'(t_n+h)$$

Effectuons des développements de Taylor à l'ordre 3.

$$y(t_n+h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + O(h^4) \quad \times \frac{11}{6}$$

$$y(t_n) = y(t_n) \quad (-3)$$

$$y(t_n-h) = y(t_n) - h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + O(h^4) \quad \times \frac{3}{2}$$

$$y(t_n-2h) = y(t_n) - 2h y'(t_n) + 2h^2 y''(t_n) - \frac{8h^3}{6} y'''(t_n) + O(h^4) \quad \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$h\, y'(t_n+h) = \quad h y'(t_n) + h^2 y''(t_n) + \frac{h^3}{2} y'''(t_n) + O(h^4) \quad (-1)$$

$$\frac{11}{6} - \frac{9}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6} = 0$$

$$\varepsilon(h) = 0 \cdot y(t_n) + h y'(t_n) \cancel{\left(\frac{11}{6} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 1\right)}$$

$$\frac{11}{12} + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} - \frac{12}{12} = 0$$

$$+ h^2 y''(t_n) \cancel{\left(\frac{11}{12} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - 1\right)}$$

$$\frac{11}{36} - \frac{9}{36} + \frac{16}{36} - \frac{18}{36} = 0$$

$$+ h^3 y'''(t_n) \cancel{\left(\frac{11}{36} - \frac{3}{12} + \frac{8}{18} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$+ O(h^4)$$

$$\varepsilon(h) = O(h^4)$$

3- Considérons le polynôme $\rho(z) = \frac{11}{6} z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2} z - \frac{1}{3}$

1 est racine de ρ car le schéma est consistant

Donc $\rho(z) = (z-1)\left(\frac{11}{6} z^2 + \alpha z + \beta\right)$ par identification $\beta = \frac{1}{3}$

$-\alpha + \beta = 3/2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{6}$

$$\rho(z) = (z-1)\left(\frac{11}{6} z^2 - \frac{7}{6} z + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(z-1)(11z^2 - 7z + 2)$$

les racines de ρ sont $1, \lambda, \mu$ où λ, μ sont les racines de $11z^2 - 7z + 2$

$\Delta = 49 - 4 \times 2 \times 11 = 49 - 88 = -39 < 0$

donc λ et μ sont complexes conjugués.

on sait que $\lambda \mu = \frac{2}{11}$ (relation coefficients racines)

donc $\lambda \bar{\lambda} = \frac{2}{11} \Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{2}{11}$

donc λ et μ sont de module $\sqrt{\frac{2}{11}} < 1$

le polynôme f a 3 racines simples de module ≤ 1

donc d'après le cours, le schéma est stable.

4 - ~~Le~~ théorème de convergence des schémas multipas s'applique au schéma BDF3.
Celui est stable et consistant donc il est convergent. De plus comme l'erreur de consistance est $O(h^4)$, le schéma est d'ordre 3
