



CC1 Analyse numérique des équations différentielles.

Durée de l'épreuve : 1h15

Date : 08/03/2023

Documents autorisés : néant

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif sur 10 (2 points bonus). La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (6 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

On considère le schéma suivant (dit du point-milieu):

$$y_{n+1} = y_n + h f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L , indépendant de t .

- (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma quand $h \rightarrow 0$.
- (2pts) Montrer que, pour t_n et h fixés, l'application $y \mapsto f \left(t_n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y) \right)$ est Lipschitzienne.
- (2pts) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ quand $h \rightarrow 0$. Quel est l'ordre du schéma? Justifiez vos réponses.

Exercice 2. (6 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On considère le schéma suivant (BDF3) :

$$\frac{11}{6} y_{n+1} - 3 y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} = h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

C'est un schéma multipas implicite qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n, y_{n-1} et y_{n-2}

- (1pt) Montrer que le schéma est consistant.
- (2pts) Montrer que l'erreur de consistance est $\mathcal{O}(h^4)$ quand $h \rightarrow 0$. On supposera la solution $y(t)$ suffisamment régulière.
- (2pts) (*plus difficile, à admettre si besoin.*) Montrer que le schéma est stable.
- (1pt) Est-ce que le schéma est convergent? Précisez l'ordre de convergence du schéma. Justifiez vos réponses.