

TD 4 : Recherche des zéros

Exercice 4.1 : Relaxation (★)

- (a) Implémentez la méthode de relaxation du cours pour la fonction $f(x) = 2e^x - xe^x - 1$ avec $\phi(x) = 2 - e^{-x}$ et $x_1 = 1$.
- (b) Essayez de trouver un point fixe de la fonction $\phi(x) = e^{1-x^2}$ par la méthode de relaxation avec $x_1 = \frac{1}{2}$. Qu'est-ce que vous observez ?
- (c) Montrez qu'il est équivalent de trouver un point fixe de la fonction $\phi(x) = \sqrt{1 - \log x}$. Qu'est-ce qu'on observe maintenant si on choisit $x_1 = \frac{1}{2}$? Quelle est l'explication ?

Exercice 4.2 : Méthode de la sécante

Implémentez la méthode de la sécante du cours. Appliquez votre code à la fonction $f(x) = x - \cos(x^2)$ avec les valeurs de départ $x_0 = 1$ et $x_1 = 0.5$.

Exercice 4.3 : Diffraction par une fente

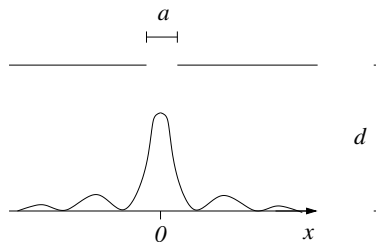
On considère la diffraction d'une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ par une fente de largeur a . La figure de diffraction obtenue sur un écran à distance d de la fente est décrite par l'intensité $I(x)$

$$I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a x}{\lambda d}, \quad \text{avec } \operatorname{sinc} t \equiv \frac{\sin t}{t}.$$

On prend $a = 5 \mu\text{m}$, $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $d = 20 \text{ cm}$.

- (a) *Sur papier* : Trouvez une fonction dont les zéros donnent les positions x des maxima d'intensité.
- (b) Calculez les positions des 3 premiers maxima avec une précision numérique relative d'au moins 10^{-3} avec une méthode de votre choix.

Indication : Repérez d'abord la position approximative des zéros, par exemple avec l'aide d'un graphique de la fonction, afin de trouver des bons points ou intervalles de départ.



Exercice 4.4 : Méthode de Newton complexe (★)

L'objectif de cet exercice est d'analyser la convergence de la méthode de Newton numériquement, dans le cas où la fonction f dont on cherche le zéro est un polynôme à une variable complexe z . On rappelle qu'un polynôme du degré d sur \mathbb{C} possède d racines (qui peuvent être dégénérées). En fonction de la valeur initiale z_1 , l'algorithme de Newton va soit converger vers une de ces racines, soit ne pas converger.

Ici on étudiera son comportement en fonction de $z_1 \in \mathbb{C}$ pour l'exemple du polynôme $f(z) = z^5 - z - 1$.

- (a) *Sur papier* : Trouvez la dérivée $f'(z)$ de $f(z)$.
- (b) Réalisez une fonction `newton_conv(x, y)` à deux arguments supposés réels, $x = \operatorname{Re} z_1$ et $y = \operatorname{Im} z_1$. Cette fonction retournera le nombre d'itérations nécessaire pour converger vers une racine quelconque de $f(z)$ avec une précision de $\epsilon = 10^{-3}$, ou 20 si après 20 itérations aucune racine n'a été trouvée.
- (c) Créez un graphique de la fonction `newton_conv(x, y)` pour 500 valeurs de $\operatorname{Re} z_1 = x$ entre -10 et $+10$, et 500 valeurs de $\operatorname{Im} z_1 = y$ entre -10 et $+10$. Servez-vous de la fonction `matplotlib.pyplot.imshow()`.
- (d) Avec un programme auxiliaire, trouvez les valeurs numériques des cinq racines de $f(z)$ avec une précision de 10^{-5} .
- (e) Réalisez une fonction `quelle_racine(x, y)` à deux arguments supposés réels, $x = \operatorname{Re} z_1$ et $y = \operatorname{Im} z_1$. Cette fonction retournera 1, 2, 3, 4 ou 5 selon la racine vers laquelle la méthode de Newton converge. Si après 20 itérations elle n'a pas trouvé une des racines, elle retournera 0.
- (f) Visualisez la fonction `quelle_racine(x, y)` pour 500 valeurs de $\operatorname{Re} z_1 = x$ entre -10 et $+10$, et 500 valeurs de $\operatorname{Im} z_1 = y$ entre -10 et $+10$.
- (g) Expérimentez avec d'autres régions du plan complexe et avec d'autres polynômes à volonté. Adaptez la précision et le nombre maximal d'itérations si nécessaire.

Rappel : Un nombre complexe z avec partie réelle x et partie imaginaire y peut être construit avec la commande `z = complex(x, y)`.