TD 4 : Recherche des zéros

Exercice 4.1 : Relaxation ($\star$)

(a) Implémentez la méthode de relaxation du cours pour la fonction $f(x) = 2e^x - xe^x - 1$ avec $\phi(x) = 2 - e^{-x}$ et $x_1 = 1$.

(b) Essayez de trouver un point fixe de la fonction $\phi(x) = e^{1-x^2}$ par la méthode de relaxation avec $x_1 = \frac{1}{2}$. Qu'est-ce que vous observez ?

(c) Montrez qu'il est équivalent de trouver un point fixe de la fonction $\phi(x) = \sqrt{1 - \log x}$. Qu'est-ce qu'on observe maintenant si on choisit $x_1 = \frac{1}{2}$? Quelle est l'explication ?

Exercice 4.2 : Méthode de la sécante

Implémentez la méthode de la sécante du cours. Appliquez votre code à la fonction $f(x) = x - \cos(x^2)$ avec les valeurs de départ $x_0 = 1$ et $x_1 = 0.5$.

Exercice 4.3 : Diffraction par une fente

On considère la diffraction d'une onde lumineuse monochromatique de longeur d'onde λ par une fente de largeur a. La figure de diffraction obtenue sur un écran à distance d de la fente est décrite par l'intensité $I(x)$

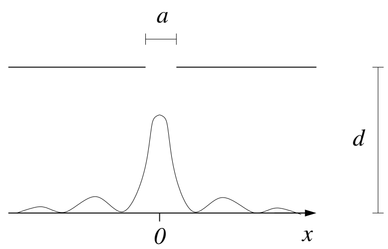
$$I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a\, x}{\lambda d}\,, \qquad \text{avec } \operatorname{sinc} t \equiv \frac{\sin t}{t}\,.$$

On prend $a = 5\ \mu$m, $\lambda = 600$ nm et $d = 20$ cm.

(a) *Sur papier :* Rendez-vous compte que les maxima d'intensité sont données par $x = \frac{\lambda d}{\pi a} t$, où t vérifie l'équation transcendante $\tan(t) - t = 0$.

(b) Le premier maximum est évidemment à $x = 0$. Calculez les positions des deux maxima suivantes avec une précision numérique relative d'au moins 10^{-3}. Utilisez une méthode appropriée de votre choix.

Indication : Repérez d'abord la position approximative des zéros, par exemple avec l'aide d'un graphique de la fonction, afin de trouver des bons points ou intervalles de départ.



Exercice 4.4 : Méthode de Newton complexe ($\star$)

L'objectif de cet exercice est d'analyser la convergence de la méthode de Newton numériquement pour le cas d'une fonction polynomielle complexe $f(z)$. Rappellons qu'un polynôme du degré d sur $\mathbb{C}$ possède d racines (qui peuvent être dégénérées). La méthode de Newton va soit converger vers une de ces racines, soit ne pas converger, en fonction du point de départ z_1 choisi. Étudions sa convergence pour l'exemple du polynôme $f(z) = z^5 - z - 1$.

(a) *Sur papier :* Trouvez la dérivée $f'(z)$ de $f(z)$.

(b) Réalisez une fonction `newton_conv(x, y)` à deux arguments supposés réels, $\texttt{x} = \mathrm{Re}\, z_1$ et $\texttt{y} = \mathrm{Im}\, z_1$. Cette fonction retournera le nombre d'itérations nécessaire pour converger vers une racine quelconque de $f(z)$ avec une précision de $\epsilon = 10^{-3}$, ou 20 si après 20 itérations aucune racine n'a été trouvée.

(c) Créez un graphique de la fonction `newton_conv(x, y)` pour 500 valeurs de $\mathrm{Re}\, z_1 = \texttt{x}$ entre -10 et $+10$, et 500 valeurs de $\mathrm{Im}\, z_1 = \texttt{y}$ entre -10 et $+10$. Servez-vous de la fonction `matplotlib.pyplot.imshow()`.

(d) Avec un programme auxiliaire, trouvez les valeurs numériques des cinq racines de $f(z)$ avec une précision de 10^{-5}.

(e) Réalisez une fonction `quelle_racine(x, y)` à deux arguments supposés réels, $\texttt{x} = \mathrm{Re}\, z_1$ et $\texttt{y} = \mathrm{Im}\, z_1$. Cette fonction retournera 1, 2, 3, 4 ou 5 selon la racine vers laquelle la méthode de Newton converge. Si la fonction n'a pas trouvé une des racines après 20 itérations, elle retournera 0.

(f) Visualisez la fonction `quelle_racine(x, y)` pour 500 valeurs de $\mathrm{Re}\, z_1 = \texttt{x}$ entre -10 et $+10$, et 500 valeurs de $\mathrm{Im}\, z_1 = \texttt{y}$ entre -10 et $+10$.

(g) Expérimentez avec d'autres régions du plan complexe et avec d'autres polynômes à volonté. Adaptez la précision et le nombre maximal d'itérations si nécessaire.

Rappel : Un nombre complexe `z` avec partie réelle `x` et partie imaginaire `y` peut se construire avec la commande `z = complex(x, y)`.