Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie

CORRIGÉ

EXAMEN FINAL-Session 1

(11/01/2023)

Problème 1 [2 points].

(a) [1 point] $det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda^2-10\lambda+25-1=\lambda^2-10\lambda+24=(\lambda-4)(\lambda-6)=0$. Valeurs propres $\lambda_1=4$ et $\lambda_2=6$.

(b) [1 point] Pour $\lambda_1=6$,

$$Ax=\lambda_1 x \iff (A-\lambda_1 I)x=0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \iff x_1=x_2$$

Solution générale $X=(x_2,x_2)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Soit $x_2=1, v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2=4$,

$$Ax=\lambda_2 x \iff (A-\lambda_2 I)x=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \iff x_1=-x_2$$

Solution générale $X=(-x_2,x_2)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Soit $x_2=1, v_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2 [3 points].

(a) [1 point] Soit $z=x+iy$ et $\bar{z}=x-iy$, alors l'équation $2z+i\bar{z}=3$ devient $2x+2iy+ix+y=3$ impliquant

$$2x+y+i(2y+x)=3.$$

Par identification, on a $2x+y=3$ et $2y+x=0$ impliquant que $x=2$ et $y=-1$. La solution cherchée est donc $z=2-i$.

(b) [2 points] Soit $w=x+iy$. Nous cherchons les solution à $w^2=(x+iy)^2=i$. Ce qui implique que $x^2+2ixy-y^2=i$. Ceci nous ramène à $x^2-y^2=0$, $x^2+y^2=\sqrt{0^2+1^2}=1$ et $2xy=1$. Le deux premiers égalités donnent $x=y$ et $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $2xy>0$ alors x et y ont le même signe.

Les solutions sont donc $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ainsi, les racines carrées de i sont $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On peut également trouver les racines en utilisant que

$$\sqrt[n]{w}=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$$

où r est le module de w, $k = 0, \ldots, n-1$ et

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{if } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{if } x < 0, \\ \pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, on obtient

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Problème 3 [5 points].

(a) [2 points] $f(x, y) = x^2 + xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

A partir de $2x + y = 0$ et $x = 0$ nous avons que $x = 0, y = 0$. Donc le seul point critique est $(0, 0)$. Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

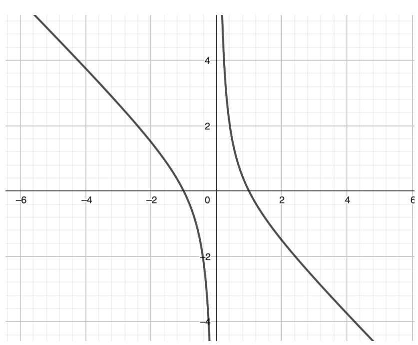
Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = (2)(0) - (1)^2 = -1 < 0$$

Alors, le point critique $(0, 0)$ est un point selle.

(b) [1 point] Nous avons $f(0, 0) = 0$ donc le point $(0, 0, 1)$ n'appartient pas à S_f.

(c) [1 point] Hyperbole non équilatère.



(d) [1 point] Oui, la représentation à droite correspond bien à S_f, En effet, la surface admet un point selle, et les courbes de niveau (hyperboles) induisent cette représentation.

Problème 4 [7 points].

(a) [1 point] Le domaine de définition de w est $\mathbb{R}^2$.

(b) [2 point] Une paramétrisation du cercle est donnée par $\gamma(t) = (x(t); y(t)) = (\cos t; \sin t)$, où $t \in [0; 2\pi]$. Alors $dx = -\sin t dt$ et $dy = \cos t dt$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)(\cos t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left((-\cos t \sin t - \sin^2 t) + (\cos^2 t - \sin t \cos t)\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos t \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin 2t + \cos 2t)\, dt \\
&= \left[\tfrac{\cos 2t}{2} + \tfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

(c) [3 point] Nous avons $w = F(x,y)dx + G(x,y)dy = (x+y)dx + (x-y)dy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 = \frac{\partial G}{\partial x}$ et donc w est fermée. En plus, le domaine de définition de w $\mathbb{R}^2$ est étoilée. Donc, d'aprè le théorème de Poincaré, w est bien exacte.

Nous cherchons f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x - y$ En intégrant la dernière égalité par rapport à y on obtient que $f = \int (x-y)dy = xy - \frac{y^2}{2} + c(x)$. En dérivant cette égalité par rapport à x on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = y + c'(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ on en déduit que $c'(x) = x$ et en intégrant par rapport à x les deux côtés de cette égalité nous obtenons $c(x) = \frac{x^2}{2} + K$ où K est une constante. D'où $f = xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + K$.

(d) [1 point] On aurait pu conclure que $\int_C w = 0$ puisque w est exacte et C est une courbe fermée.

Problème 5 [3 points].

[1 point] L'équation homogène est $y'(t) + \frac{2t^2}{t^3}\ y(t) = 0$ ou encore $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 0$ dont les solutions sont :

$$y(t) = C \exp^{\int -\frac{2}{t}dt} = C \exp^{-2\ln t} = C \exp^{\ln t^{-2}} = Ct^{-2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)t^{-2}$$

On a $y_0'(t) + \frac{2}{t}y_0(t) = 3t^5$ alors $C(t)(-2)t^{-3} + t^{-2}C'(t) + \frac{2}{t}C(t)t^{-2} = 3t^5$ d'où $C'(t) = 3t^7$. En intégrant par rapport à t nous obtenons

$$C(t) = \int 3t^7 dt = \frac{3}{8}t^8 + K, K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = \frac{3}{8}t^8 t^{-2} = \frac{3}{8}t^6$.

[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = \frac{3}{8}t^6 + Ct^{-2}$$

En utilisant que pour $t = 1$ on a $y = 5$ alors $5 = \frac{3}{8} + C$ obtenant $C = \frac{37}{8}$. Donc, la solution générale est

$$y(t) = \frac{3}{8}t^6 + \frac{37}{8}t^{-2}.$$