

EXAMEN FINAL - Session 1

(11/01/2023)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

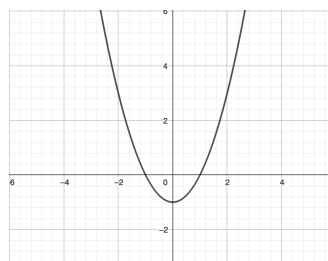
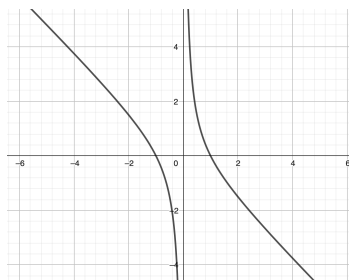
- (a) Trouver les valeurs propres de A .
- (b) Déterminer les vecteurs propres correspondants (c-à-d, les solutions avec chaque valeur propre).

Problème 2.

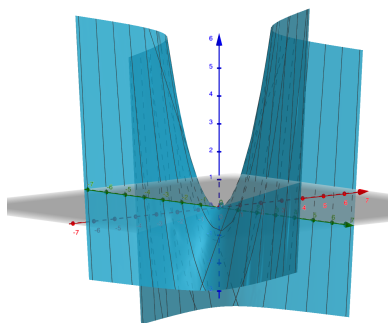
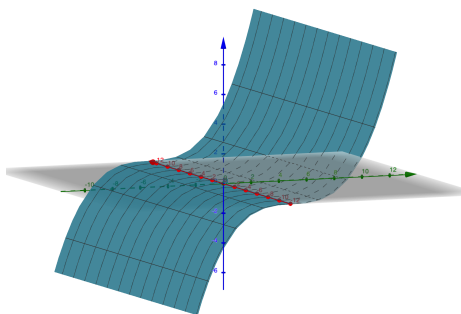
- (a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation suivante $2z + i\bar{z} = 3$.
- (b) Calculer les racines carrées de i . Donnez les solutions en coordonnées polaires et en coordonnées rectangulaires.

Problème 3. Soit $f(x, y) = x^2 + xy$.

- (a) Déterminer les extrema locaux de $f(x, y)$.
- (b) La surface-graphe S_f contient-elle le point $(0, 0, 1)$?
- (c) Une des figures ci-dessous représente une courbe de niveau de S_f . Laquelle? (Justifier votre choix).



- (d) S_f admet-elle l'une de deux représentations ci-dessous? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S_f (justifiez votre réponse)



Problème 4. On considère la forme différentielle

$$w = (x + y)dx + (x - y)dy$$

(a) Dans quel domaine w est-elle définie ?

(b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_C w$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct, c'est-à-dire, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. (*indication : donner une paramétrisation du cercle et utiliser $\sin(2t) = 2 \cos t \sin t$ et $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$*).

(c) La forme w est-elle exacte ? Si c'est le cas chercher f tel que $df = w$.

(d) Qu'est-ce qu'on aurait pu conclure à propos de $\int_C w$? (justifiez).

Problème 5. Résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{2t^2}{t^3} y(t) = 3t^5 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$