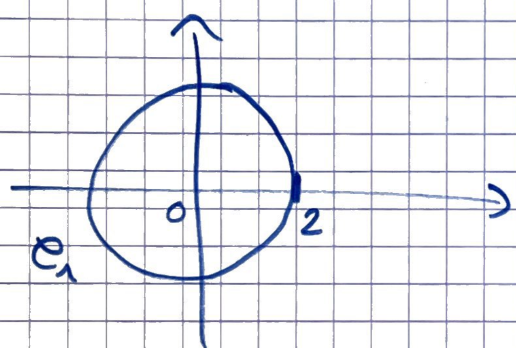
OM2 Examen

Exo 1

1) $\alpha(x,y) = e^{x^2+y^2-4}$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \mathcal{C}_1 &\iff \alpha(x,y) = 1 \\
&\iff e^{x^2+y^2-4} = 1 \\
&\iff x^2+y^2-4 = 0 \\
&\iff x^2+y^2 = 4
\end{aligned}
$$

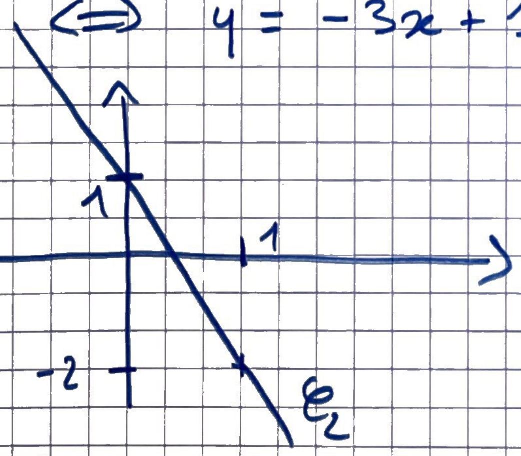
équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{4} = 2$



2) $\beta(x,y) = y + 3x + 1$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \mathcal{C}_2 &\iff \beta(x,y) = 2 \\
&\iff y+3x+1 = 2 \\
&\iff y = -3x + 1
\end{aligned}
$$

équation de droite affine



Exo 2

1) $f(x,y) = e^{2x/3y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3y} e^{2x/3y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{3y^2} e^{2x/3y}$$

donc $$df = \frac{2}{3y} e^{2x/3y} dx - \frac{2x}{3y^2} e^{2x/3y} dy$$

2) $g(x,y) = \ln(\sin(xy^2))$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 \cos(xy^2)}{\sin(xy^2)} = \frac{y^2}{\tan(xy^2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy \cos(xy^2)}{\sin(xy^2)} = \frac{2xy}{\tan(xy^2)}$$

donc $$dg = \frac{1}{\tan(xy^2)} \left(y^2 dx + 2xy\, dy \right)$$

Ex 3

1) $$\sigma(x,y) = \underbrace{(5x^2y - 4xy)}_{=: a(x,y)} dx + \underbrace{(3x^2 - 2y)}_{=: b(x,y)} dy$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = 5x^2 - 4x \qquad \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = 6x$$

$\rightarrow \dfrac{\partial a}{\partial y} \neq \dfrac{\partial b}{\partial x}$ donc σ n'est pas fermée.

2) • $\delta(x,y) = \underbrace{\dfrac{-2y}{x^2+y^2}}_{a(x,y)} dx + \underbrace{\dfrac{2x}{x^2+y^2}}_{b(x,y)} dy$

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(x^2+y^2) - (-2y)\times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On a $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$ donc δ est fermée.

• δ est définie si x^2+y^2 est non nul,
donc si $(x,y) \neq (0,0)$
D'où $D_\delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

$\rightsquigarrow$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$
$dx = -\sin(t)dt$
$dy = \cos(t)\,dt$

$$\int_\gamma \delta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \times (-\sin t) + \frac{2\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \times \cos t \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 t + 2\cos^2 t\right) dt$$ car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$= \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi.$$

- Si δ était exacte alors son intégrale le long de tout chemin fermé serait nulle.
Or on a vu que $\int_\gamma \delta = 4\pi \neq 0$.

Donc δ n'est pas ~~fermée~~ exacte.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $F(x,y) = \cos(\sin(xy))$

F est C^2 par composition de fonctions C^2

et :
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y\cos(xy)\sin(\sin(xy))$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x\cos(xy)\sin(\sin(xy))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\cos(xy)\sin(\sin(xy)) + xy\sin(xy)\sin(\sin(xy)) - xy\cos^2(xy)\cos(\sin(xy))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\cos(xy)\sin(\sin(xy)) + xy\sin(xy)\sin(\sin(xy)) - xy\cos^2(xy)\cos(\sin(xy))$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, le thm de Schwarz est vérifié.

Ex 5

1) On a par hypothèse :

$$df_1 = \lambda_1$$

donc
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = -\sin(e^{xy})\, e^{xy}\, y \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\sin(e^{xy})\, e^{xy}\, x \end{cases}$$

En primitivant la première ligne par rapport à x, on obtient que f_1 est de la forme :

$$f_1(x,y) = \cos(e^{xy}) + r(y)$$

avec r une fonction qui ne dépend que de y.

Donc $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\sin(e^{xy})\, e^{xy}\, x + r'(y)$

D'après la 2ème ligne, nécessairement $r'(y) = 0$.

Posons $f_1(x,y) = \cos(e^{xy})$.

On a alors $df_1 = \lambda_1$.

2) De même, posons $f_2(x,y) = e^{x^2+y^3+2}$

alors $df_2 = \lambda_2$

3) De même, posons $f_3(x,y) = \ln(|\sin(x+2y)|)$

alors $df_3 = \lambda_3$

- Ces trois formes sont exactes car elles sont la différentielle de fonctions (définition). Or exacte $\Rightarrow$ fermée donc elles sont également fermées.

$\boxed{\text{Ex 6}}$

1) $h(x,y) = 4\cos(x) - 3y^2 - 4$

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -4\sin(x)$ $\qquad$ $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -6y$

$(x,y) \in \text{Crit } h \iff \nabla h(x,y) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} -4\sin x = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \equiv 0 \ [\pi] \\ y = 0 \end{cases}$

D'où $\text{Crit } h = \{ (k\pi, 0), \ k \in \mathbb{Z} \}$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4$

$(x,y) \in \text{Crit } f \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

donc $\text{Crit } f = \{(1,-2)\}$.

- On a $f(x,y) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+2)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2$

et $f(1,-2) = 2$ Donc $\text{Crit } f$ est un <u>minimum global</u>