HAX201X - Analyse 2 - Année 2021-2022

CC2 du 05/04/22 - Durée : 1h10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est donné à titre indicatif. **2 points bonus**

Exercice 1 (7 points)

(a) Rappeler la définition traduisant qu'une suite réelle, (u_n), est une suite de Cauchy.

(b) On suppose qu'une suite est convergente. *Démontrer* qu'elle est de Cauchy.

(c) *En déduire* que la suite (v_n), définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, est divergente.

Indication : on pourra montrer que $\forall n \geq 1$, $|v_{2n} - v_n| \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

(b) En déduire la limite de (v_n).

Exercice 2 (4 points)

Donner un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de :

(a) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3 + \ln(1+x)}$.

(b) $g(x) = x^2 e^x - x^3$.

Exercice 3 (6 points)

(a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de $u(x) = 2\cos(x) + x^3 + x^4$.
En déduire le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \ln(u(x))$.

(b) Donner le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$ de $g(x) = e^x \sqrt{x}$.

Exercice 4 (5 points)

(a) Donner le développement limité à l'ordre n en $x_0 = 0$ de f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1-2x^2}$.
On distinguera les cas où n est pair ou impair.

(b) *En déduire* $f^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.