HAX201X - Analyse 2 - Année 2021-2022

Correction de l'examen du 16 Mai 2022

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, une fonction continue. On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) *Démontrer* que si f est croissante, alors (u_n) est monotone.

Si $u_1 \geq u_0$, la croissance de f implique que $u_2 = f(u_1) \geq u_1 = f(u_0)$. Une récurrence élémentaire permet alors de montrer que $u_{k+1} \geq u_k, \forall k \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est croissante. Dans l'autre cas, $u_1 \leq u_0$, on montre de la même façon que la suite (u_n) est décroissante.

(2) On suppose que *la fonction* f est croissante et bornée. Montrer que (u_n) converge.

Comme la fonction f est bornée, il existe $R \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq R, \forall x \in \mathbb{R}$. Cela montre que pour tout $n \geq 1$, on a $|u_n| = |f(u_{n-1})| \leq R$. La suite (u_n) est donc bornée. A la question précédente, on a montré que la suite (u_n) est monotone. On peut alors conclure que la suite (u_n) est convergente.

(3) On pose, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

L'image de la fonction arctan est l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, ainsi arctan est une fonction bornée. D'autre part, comme $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, la fonction arctan est croissante. En utilisant les questions précédentes, on peut conclure que la suite (u_n) est convergente. La limite de (u_n), notée L, doit satisfaire la relation $\arctan(L) = L$, $L \in]-\pi/2, \pi/2[$. Cette relation, qui est équivalente à $\tan(L) = L$, $L \in]-\pi/2, \pi/2[$, n'admet qu'une solution $L = 0$.

Exercice 2

(1) Donner les développements limités en 0 de e^x, $\ln(1+x)$, et $\cos(x)$ à l'ordre 4 ; puis de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2.

(2) **(a)** Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x^2)\cos(x)$.

(b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+e^x}$.

Pour vérifier les calculs, on peut utiliser https ://www.dcode.fr/developpement-limite.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, définie par $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1 - \ln(1+x)}{1+x}$.

(a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.

On a les développements limités à l'ordre 2 en 0 suivants :

$$e^{\lambda x} - 1 = \lambda x + \frac{\lambda^2}{2}x^2 + o(x^2), \quad -\ln(1+x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \left((\lambda-1)x + \tfrac{\lambda^2+1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\ &= (\lambda-1)x + (\tfrac{\lambda^2+1}{2} + 1 - \lambda)x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

(b) On pose, $\forall n \geq 1$, $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Etudier la convergence ou la divergence de la série $\sum a_n$ en fonction du paramètre λ.

Si $\lambda = 1$, alors $f(x) \sim_0 x^2$. Cela implique que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, on peut conclure que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

Si $\lambda \neq 1$, alors $f(x) \sim_0 (\lambda - 1)x$. Cela implique que $a_n \sim \frac{\lambda-1}{n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, on peut conclure que la série $\sum a_n$ est aussi divergente.

Exercice 3

(1) *Démontrer* que si une série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim u_n = 0$.

On pose $S_n = \sum_{k=k_0}^{n} u_k$ pour tout $n \geq k_0$. La relation $u_n = S_n - S_{n-1}$ implique que si (S_n) est convergente, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n \; - \; \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

(2) Soient a et b, deux réels. On pose, $\forall n \geq 1$, $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

(a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.

On a $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n) + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. De même,

$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln(1 + \tfrac{2}{n}) = \ln(n) + \tfrac{2}{n} + O(\tfrac{1}{n^2}).$$

On voit alors que

$$u_n = (1 + a + b)\ln(n) + (a + 2b)\tfrac{1}{n} + O(\tfrac{1}{n^2}).$$

On voit alors que (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.

(b) Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Les questions précédentes nous permettent de voir que $1 + a + b = 0$ est une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Si $1 + a + b = 0$ alors $u_n = (a + 2b)\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. On voit alors que $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $a + 2b = 0$.

(c) On suppose que $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $1 + a + b = a + 2b = 0$. C'est à dire $a = -2$ et $b = 1$. Dans ce cas $u_n = \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) = T_n + \ln(n+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) = T_n + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2).$$

Alors

$$S_n = T_n - 2(T_n + \ln(n+1)) + T_n + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2) = -\ln(2) + \ln(\tfrac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2}).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2}) = 0$, on peut conclure que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = -\ln(2)$.

Exercice 4

Partie A : Lemme de Cesàro

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers une réel $l \in \mathbb{R}$, et la moyenne de ses n premiers termes, $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Le but de cette partie est de démontrer que (C_n) converge également vers l.

(1) On suppose que $l = 0$. Montrer que (C_n) converge également vers 0. Indication : *Ecrire, avec des quantificateurs, que $u_n \to 0$ et découper la somme C_n en deux parties.*

Pour tout $N \geq 1$, posons $R_N = \sup\{|u_1|, \ldots, |u_N|\}$ et $\epsilon_N = \sup\{|u_k|, k \geq N+1\}$. Pour $n \geq N \geq 1$, on a les majorations

$$|C_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k| \leq \frac{N\times R_N}{n} + \frac{n-N}{n}\epsilon_N \leq \frac{N\times R_N}{n} + \epsilon_N$$

Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\epsilon_N \leq \epsilon$. Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$|C_n| \leq \frac{N\times R_N}{n} + \epsilon.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{N\times R_N}{n} = 0$, il existe N' tel que $\frac{N\times R_N}{n} \leq \epsilon$ si $n \geq N'$. Finalement, on obtient que $|C_n| \leq 2\epsilon$ si $n \geq \max(N, N')$. Cela montre que $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

(2) On suppose que $l \neq 0$. Montrer que (C_n) converge également vers l.
Indication : *Considérer la suite $v_n = u_n - l$ et utiliser la question précédente.*

On remarque que

$$C_n - l = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_n$$

A la question précédente, on a montré que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_n$ converge vers 0 car $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. On a donc démontré que $\lim_{n\to\infty} C_n = l$.

Partie B : discussion et applications

(1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.
Que peut-on en déduire quant à la réciproque du Lemme de Cesàro ?

La suite $A_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ est périodique, valant successivement -1 et 0. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} = 0$, la suite (A_n) étant bornée. Cela montre que la réciproque du Lemme de Cesàro est fausse.

(2) Soit (u_n), une suite convergeant vers un réel $l \neq 0$.

(a) La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Non. Voir la question (1) de l'exercice 3.

(b) En déduire, en utilisant le Lemme de Cesàro, un équivalent en $+\infty$ de $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

La suite $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers $l \neq 0$. Cela signifie que $S_n \sim nl$.

(3) Soit (x_n), une suite de réels strictement positifs, qui converge vers un réel $a > 0$.

(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

D'après le Lemme de Cesàro, on sait que la suite

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)$$

converge vers $\ln(a)$. Cela implique que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ converge vers $a = \exp(\ln(a))$.

(b) Que peut-on en déduire par rapport aux critères de convergence de Cauchy et de d'Alembert pour les séries ?

Le critère de Cauchy dit que $\sum y_k$ est convergente si $(y_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers $L < 1$.
Le critère de d'Alembert dit que $\sum y_k$ est convergente si $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ converge vers $L < 1$.
Posons

$$x_k = \frac{y_{k+1}}{y_k}, \quad \forall k \geq 1.$$

On voit alors que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{y_{n+1}^{\frac{1}{n}}}{y_1^{\frac{1}{n}}}$$

Supposons que $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = L$. Comme $\lim_{n\to\infty}(y_1)^{\frac{1}{n}} = 1$ et que $\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = L$, on voit que $\lim_{n\to\infty}(y_{n+1})^{\frac{1}{n}} = L$. Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty}(y_n)^{\frac{1}{n}} = L.$$

On remarque ainsi que le critère de d'Alembert est un cas particulier du critère de Cauchy pour la convergence des séries à termes strictement positifs.