HAX201X - Analyse 2 - Année 2021-2022
Examen du 16 Mai 2022 - Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction **(3 points bonus)**.

Exercice 1 (4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, une fonction continue.
On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) *Démontrer* que si f est croissante, alors (u_n) est monotone.

(2) On suppose que *la fonction* f est croissante et bornée. Montrer que (u_n) converge.

(3) On pose, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2 (6 points)

(1) Donner les développements limités en 0 de e^x, $\ln(1+x)$, et $\cos(x)$ à l'ordre 4 ; puis de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 2.

(2) **(a)** Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x^2)\cos(x)$.
(b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+e^x}$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, définie par $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1 - \ln(1+x)}{1+x}$.
(a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
(b) On pose, $\forall n \geq 1$, $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.
Etudier la convergence ou la divergence de la série $\sum a_n$ en fonction du paramètre λ.

Exercice 3 (4 points)

(1) *Démontrer* que si une série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim u_n = 0$.

(2) Soient a et b, deux réels. On pose, $\forall n \geq 1$, $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.
(a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.
(b) Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
(c) On suppose que $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 (6 points + 3 points bonus)

Nota : la partie B peut être traitée en admettant les résultats de la partie A.

Partie A : Lemme de Cesàro. (3 points)
On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers une réel $l \in \mathbb{R}$, et la moyenne de ses n premiers termes, $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Le but de cette partie est de démontrer que (C_n) converge également vers l.

(1) On suppose que $l = 0$. Montrer que (C_n) converge également vers 0. Indication : *Ecrire, avec des quantificateurs, que* $u_n \to 0$ *et découper la somme* C_n *en deux parties.*

(2) On suppose que $l \neq 0$. Montrer que (C_n) converge également vers l.
Indication : *Considérer la suite* $v_n = u_n - l$ *et utiliser la question précédente.*

Partie B : discussion et applications. (3 points + 3 points bonus pour (3))

(1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.
Que peut-on en déduire quant à la réciproque du Lemme de Cesàro ?

(2) Soit (u_n), une suite convergeant vers un réel $l \neq 0$.
(a) La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
(b) En déduire, en utilisant le Lemme de Cesàro, un équivalent en $+\infty$ de $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(3) Soit (x_n), une suite de réels strictement positifs, qui converge vers un réel $a > 0$.
(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = a$.
(b) Que peut-on en déduire par rapport aux critères de convergence de Cauchy et de d'Alembert pour les séries ?