Examen de 2ème session
27 juin 2022
Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Documents, calculettes et téléphones portables interdits. Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Exercice 1 *(4 points)*

(1) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

(2) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

(3) On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{3}|a_n - a_{n-1}|, \forall n \geq 1$.

— Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{3^n}|a_1 - a_0|, \forall n \geq 0$.

— En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 2 *(4 points)*

(1) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

(2) En utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, montrer que

$$1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 < \sqrt[3]{1+x} < 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3, \quad \forall x > 0.$$

(3) En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,02}$ à 10^{-6} près.

Exercice 3 *(4 points)*

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'encadrement

$$(\star) \qquad \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$$

(2) Soit $\alpha > 0$. En utilisant l'encadrement $(\star)$, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(3) On considère la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. En utilisant l'encadrement $(\star)$, montrer que $S_n = 2\sqrt{n} + O(1)$.

Tournez la page S. V. P.

Exercice 4 *(6 points)*

(1) Déterminer la limite de $A(x) := \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin(x)^2}$ lorsque $x \to 0$.

(2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 1$ de $B(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$ ·

(3) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $C(x) := \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + x$.

(4) Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote du graphe de la fonction $D(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Exercice 5 *(4 points)*

(1) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

(2) Montrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.

(3) Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ·