Questions de cours et de révision

Ces questions vous aideront à vérifier que vous avez bien compris le matériel nécessaire pour avancer. Certaines sont des questions de révision ; si vous ne savez pas y répondre, il s'impose de revoir le sujet correspondant (notamment les cours d'outils mathématiques en L2 et ceux de mécanique analytique et mécanique quantique du premier semestre en L3). D'autres font plutôt référence au matériel du cours. N'hésitez pas de consulter d'autres ressources (ouvrages, discussions avec vos camarades, wikipédia. . .)

Savoir répondre à *toutes* les questions de la section actuelle est une condition nécessaire (mais pas formcement suffisante) pour progresser dans le cours. Enfin, inventez vos propres questions de cours, essayez d'y répondre et si vous n'y arrivez pas, discutez-en avec vos camarades et/ou posez-les aux sessions de TD.

1.1 L'espace de Hilbert

1. Quelles opérations sont généralement définies sur un espace vectoriel ? ☐ Addition d'un vecteur à un autre ☐ Soustraction d'un vecteur d'un autre ☐ Multiplication d'un vecteur par un autre ☐ Division d'un vecteur par un autre (non nul) ☐ Addition d'un vecteur à un scalaire ☐ Soustraction d'un scalaire d'un vecteur ☐ Multiplication d'un vecteur par un scalaire ☐ Division d'un vecteur par un scalaire (non nul)
2. Qu'est-ce que la différence entre un espace vectoriel réel et un espace vectoriel complexe ? Rendez-vous compte que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel complexe et donnez sa dimension. Rendez-vous compte que $\mathbb{C}$ est aussi un espace vectoriel réel et donnez sa dimension.
3. Montrez : $\langle \lambda\psi|\chi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\chi\rangle$ et $||\lambda\psi|| = |\lambda|\ ||\psi||$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$.
4. Complétez : Soit ψ une fonction à carré intégrable, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi : x \mapsto \psi(x)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $(\lambda\psi)$ est une fonction à carré intégrable qui associe $x \mapsto$
5. Pourquoi $\frac{1}{2\pi i(n-m)}\left[e^{i(n-m)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$?

1.2 Opérateurs

1. Donnez deux exemples d'opérateurs hermitiens sur $\mathbb{C}^2$. Donnez deux exemples d'opérateurs unitaires sur $\mathbb{C}^2$.
2. Rappelez-vous de la définition du supremum dans $||\mathbf{A}|| = \sup_{|\psi\rangle} \frac{||\mathbf{A}\psi||}{||\psi||}$. Donnez $||\mathbf{1}||$.
3. Calculez le crochet de Poisson $\{p_i^2, q_j\}$. Calculez le commutateur $[\mathbf{P}_i^2, \mathbf{X}_j]$.

1.3 Mesures

1. Donnez les valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{1}$. Est-ce qu'elles sont dégénérées ? Donnez les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres de l'opérateur $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}^2$. Est-ce que les valeurs propres sont dégénérées ?
2. Sur $\mathbb{C}^2$, quels opérateurs parmi les suivants sont des projecteurs ? Au cas échéant, sur quel sous-espace projètent-ils ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $\mathbf{A}$ un opérateur hermitien. Dans une base où $\mathbf{A}$ est diagonale, pourquoi $\sum_\lambda \mathbf{\Pi}_\lambda = \mathbf{1}$ et pourquoi $\sum_\lambda \lambda \mathbf{\Pi}_\lambda = \mathbf{A}$? (Ici λ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Pi}_\lambda$ les opérateurs projecteurs correspondants.)
4. Rappelez-vous de l'expérience de pensée du chat de Schrödinger. Comment expliqueriez-vous le problème de la mesure quantique à un non-expert ?

1.4 Équation de Schrödinger

1. Donnez la définition de la fonction de Hamilton H en mécanique classique. Qu'est-ce que sa signifiance physique ? Comment en obtient-on les équations de mouvement ?
2. Rappelez-vous de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une particule libre en une dimension dans la représentation de position ($\mathbf{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$).

2.1 Écart type et principe d'incertitude

1. Soit $\mathbf{A}$ hermitien, qu'est-ce que $\Delta\mathbf{A}$ dans un des états propres de $\mathbf{A}$?
2. Donnez des exemples physiques de paires d'observables complémentaires (autre que $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$).

2.2 Le système à deux états

1. Montrez : Toute matrice hermitienne 2×2 M peut s'écrire
$$M = \alpha_0 \, \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \, \sigma^i$$
où
$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
et $\alpha_{0,1,2,3}$ sont des constantes réelles.
2. On regarde l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$; pourquoi peut-on représenter, sans perte de généralité, tout état comme un point sur la sphère de Bloch :
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,, \quad 0 \le \phi < 2\pi\,?$$
3. Les pôles de la sphère correspondent à quels états ? De quel(s) opérateur(s) hermitien(s) sont-ils les états propres ?
4. Pour un système dans l'état $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, qu'est-ce que la probabilité P de trouver 0 quand on mesure $\mathbf{S}_z$? ☐ $P = 1$ ☐ $P = \frac{1}{2}$ ☐ $P = 0$

2.3 Représentations de position et d'impulsion

1. Pourquoi $2\,||(\mathbf{X})^n||\,||\mathbf{P}|| \ge ||[(\mathbf{X})^n, \mathbf{P}]||$? Pourquoi $||[(\mathbf{X})^n, \mathbf{P}]|| = n\hbar\,||\mathbf{X}||^{n-1}$?
2. Le hamiltonien de l'oscillateur harmonique 1-dimensionnel est
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2\,.$$
Donnez-en l'expression dans la représentation de position et dans la représentation d'impulsion.

3. Pour le potentiel d'une "particule dans une boîte"

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x < 0 \text{ ou } x > L \end{cases}$$

on rappelle que les solutions de l'équation de Schrödinger indépendente du temps sont, dans la représentation de position,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Donnez-en les énergies. Pour une particule dans un des états propres d'énergie, donnez la probabilité de la trouver dans la moitié gauche de la boîte $[0, \frac{L}{2}]$ (tracez les premières fonctions d'onde pour trouver la réponse sans calcul).

4. Étant donné la fonction d'onde dans la représentation de position

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\ell}} & -\ell \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

rendez-vous compte que ψ est bien normalisée et calculez la transformée de Fourier $\widetilde{\psi}(p) = \int \mathrm{d}x\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)$. Qu'est-ce qu'on obtient lorsque $\ell \to 0$?

2.4 États propres généralisés

1. Pour les états propres généralisés $|p\rangle$ d'impulsion dont les fonctions d'onde sont $\langle x|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}px}$, rendez-vous compte que la représentation exponentielle de la distribution delta

$$2\pi\,\delta(x-y) = \int \mathrm{d}k\; e^{ik(x-y)}$$

mène à la relation d'orthogonalité

$$\langle p'|p\rangle = 2\pi\hbar\,\delta(p-p')\,.$$

3.1 L'oscillateur harmonique 1-dimensionnel

1. Montrez que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{P}$ peuvent s'écrire en fonction de

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{X} + \frac{i}{m\omega}\mathbf{P}\right)$$

et de son conjugué $\mathbf{a}^\dagger$ comme

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\omega}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right)\,, \qquad \mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right)$$

2. Vérifiez que la solution générale de l'équation différentielle

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_0(x) = 0$$

est donnée par

$$\psi_0(x) = A\,\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

où A est une constante d'intégration. Déterminez A tel que $||\psi_0||^2 = 1$, sachant que $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$.

3. Calculez les coefficients de proportionnalité dans les relations

$$\mathbf{a}|n\rangle \propto |n-1\rangle\,, \qquad \mathbf{a}^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle\,, \qquad (\mathbf{a}^\dagger)^n|0\rangle \propto |n\rangle\,.$$

4. Rendez-vous compte que les polynôme d'Hermite

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}e^{-y^2}$$

sont en fait des polynômes (malgré les exponentielles qui figurent dans la définition).

3.2 États cohérents

1. Calculez $\langle n|\alpha\rangle$, où $|n\rangle$ est un état propre normalisé d'énergie $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ et $|\alpha\rangle$ est un état cohérent normalisé vérifiant $\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.
2. Donnez l'expression du produit scalaire entre deux états cohérents $\langle\alpha|\alpha'\rangle$. Qu'est-ce qu'on obtient en particulier si α et α' sont réels ?

3.3 L'oscillateur harmonique d-dimensionnel

1. Pour des espaces vectoriels de dimension fini, le produit tensoriel $|\psi\rangle\otimes|\chi\rangle$ de deux vecteurs $|\psi\rangle\in\mathbb{C}^n$ et $|\chi\rangle\in\mathbb{C}^m$ est le produit dyadique qui peut se représenter par une matrice $n\times m$ avec les composantes $(|\psi\rangle\otimes|\chi\rangle)_{ij} = \psi_i\chi_j$. Donnez la représentation matricielle du produit tensoriel

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} =$$

2. Pourquoi le hamiltonien de l'oscillateur 2-dimensionnel isotrope est-il invariant par rotations ? Rappelez-vous de la définition du moment cinétique en mécanique classique et vérifiez que l'opérateur $\mathbf{L} = \mathbf{X}_1\mathbf{P}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{P}_1$ représente bien le moment cinétique selon le principe de correspondance.

4.1 Théorie des perturbations

1. Soit $\mathbf{A}$ un opérateur sur $\mathbb{C}^n$, réprésenté par la matrice A_{ij} par rapport à la base standard $\{|e_i\rangle\}$. Rendez-vous compte que $\langle\mathbf{A}\rangle_{ij} = A_{ij}$ (d'où la désignation "élément de matrice" pour $\langle\mathbf{A}\rangle_{ij}$ dans un contexte plus général).
2. Pour rappel, à l'ordre λ^2, les états propres $|\psi_n\rangle$ d'un hamiltonien perturbé sont donnés en fonction des états propres orthonormés $|\psi_n^{(0)}\rangle$ de l'hamiltonien sans perturbation comme

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda\sum_{k\neq n} c_{nk}^{(1)}|\psi_k^{(0)}\rangle + \lambda^2\sum_{k\neq n} c_{nk}^{(2)}|\psi_k^{(0)}\rangle\,, \qquad c_{nk}^{(1)} = \frac{\langle\mathbf{W}\rangle_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}\,.$$

Ici les $|\psi_n\rangle$ ne sont pas normalisés. Calculez $||\psi_n||$ à l'ordre λ^2 en fonction des $\langle\mathbf{W}\rangle_{kn}$ et des $E_i^{(0)}$.

3. Au potentiel d'un oscillateur harmonique, on ajoute une petite perturbation

$$\lambda\mathbf{W} = \lambda\,c\,\mathbf{X}^3$$

avec c une constante de dimension appropriée. Montrez que le décalage des niveaux énergétiques est zéro à l'ordre λ.

5.1 Potentiel central et moment cinétique orbital

1. Montrez : Si A est antisymétrique, $A_{ij} = -A_{ji}$, et S est symétrique, $S_{ij} = S_{ji}$, alors $\sum_i \sum_j A_{ij} S_{ij} = 0$.

5.2 Algèbre du moment cinétique

1. Vérifiez que les matrices $\frac{\sigma^i}{2}$ $(i = 1, 2, 3)$ vérifient l'algèbre du moment cinétique éq. (5.26).
2. Utilisez l'algèbre du moment cinétique pour montrer que $\left[\hat{\vec{\mathbf{J}}}^2, \mathbf{J}_i\right] = 0$.
3. Vérifiez éqs. (5.32) et (5.36) du cours.
4. Pourquoi est-ce que $\lambda \geq 0$ implique que λ peut s'écrire $\lambda = j(j+1)$ avec $j \geq 0$?
5. Quelle est la dimension de la représentation irréductible de spin-0 ? Donnez une représentation matricielle explicite des opérateurs $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ et $\mathbf{J}_3$ pour ce cas.

5.3 Moment cinétique orbital en représentation de position

1. Vérifiez éqs. (5.46) et (5.48) du cours.

6.1 Équation de Schrödinger pour un potentiel central