Corrections d'exercices

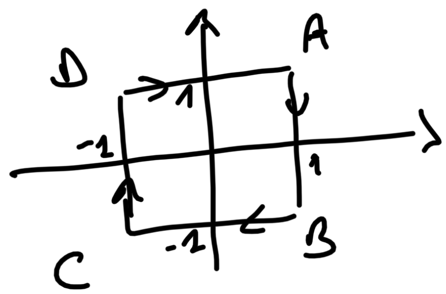
Exercice 5 (du TD 7 bis)

Calculer l'intégrale $\int_\gamma -\frac{1}{y}\,dx + \frac{1}{x}\,dy$

où γ est le carré délimité par

$A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(-1,-1)$, $D(-1,1)$

Correction :



Le carré γ se paramétrise de la façon suivante

Pour le segment $[AB]$,

$$\Gamma_{AB} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{et } \Gamma_{AB}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

Le chemin va de $A(1,1)$ à $B(1,-1)$

On a bien $\Gamma_{AB}(-1) = A$ et $\Gamma_{AB}(1) = B$

De même pour le segment $[BC]$,

$\Gamma_{BC} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\Gamma_{BC}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $[CD]$, $\Gamma_{CD} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\Gamma_{CD}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $[DA]$, $\Gamma_{DA} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Gamma_{DA}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc pour $\omega(x,y) = -\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy$ et $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \end{pmatrix}$

<u>Rappel</u> : $\omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)) = -\frac{1}{\Gamma_2(t)}\Gamma_1'(t) + \frac{1}{\Gamma_1(t)}\Gamma_2'(t)$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\Gamma_{AB}} \omega + \int_{\Gamma_{BC}} \omega + \int_{\Gamma_{CD}} \omega + \int_{\Gamma_{DA}} \omega$$

$$= \int_{-1}^{1} \omega_{\Gamma_{AB}(t)}(\Gamma_{AB}'(t))\,dt + \int_{-1}^{1} \omega_{\Gamma_{BC}(t)}(\Gamma_{BC}'(t))\,dt$$

$$+ \int_{-1}^{1} \omega_{\Gamma_{CD}(t)}(\Gamma_{CD}'(t))\,dt + \int_{-1}^{1} \omega_{\Gamma_{DA}(t)}(\Gamma_{DA}'(t))\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{-t} \times 0 + \frac{1}{1} \times (-1)\,dt + \int_{-1}^{1} -\frac{1}{-1} \times (-1) + \frac{1}{-t} \times 0\,dt$$

$$+\int_{-1}^{1} -\frac{1}{t}\times 0 + \frac{1}{-1}\times 1 \, dt + \int_{-1}^{1} -\frac{1}{1}\times 1 + \frac{1}{t}\times 0 \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} -1 \, dt + \int_{-1}^{1} -1 \, dt + \int_{-1}^{1} -1 \, dt + \int_{-1}^{1} -1 \, dt$$

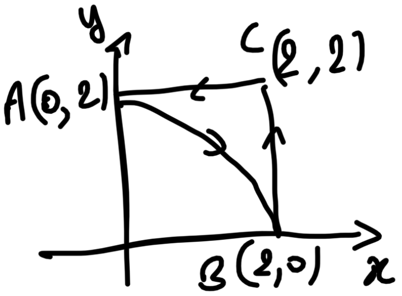
$$= 4 \times (-2) = -8$$

Donc $$\boxed{\int_{\gamma} -\frac{1}{y} \, dx + \frac{1}{x} \, dy = -8}$$

Exercices supplémentaires

Ex 1 Calculer l'intégrale $\int_\gamma 3xy^2\,dx + y\,dy$

où γ est la courbe suivante



$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} & (0 \leq x \leq 2)\ [AB] \\ x = 2 & (0 \leq y \leq 2)\ [BC] \\ y = 2 & (2 \geq x \geq 0)\ [CA] \end{cases}$$

Correction : • $\Gamma_{AB} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{AB}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}} \end{pmatrix}$$

• $\Gamma_{BC} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \qquad \Gamma_{BC}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\Gamma_{CA} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_{CA}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc pour $\omega(x,y) = 3xy^2\,dx + y\,dy$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Gamma_{AB}} \omega + \int_{\Gamma_{BC}} \omega + \int_{\Gamma_{CA}} \omega$$

$$= \int_0^2 \omega(\Gamma_{AB}(t))\, \Gamma_{AB}'(t)\, dt + \int_0^2 \omega(\Gamma_{BC}(t))\, \Gamma_{BC}'(t)\, dt$$

$$+ \int_0^2 \omega(\Gamma_{CA}(t))\, \Gamma_{CA}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^2 3 \times t\,(4 - t^2) \times 1 + \sqrt{4-t^2} \times \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$$

$$+ \int_0^2 3 \times 2 \times t^2 \times 0 + t \times 1 \, dt$$

$$+ \int_0^2 3 \times (2-t) \times 2^2 \times (-1) + 2 \times 0$$

$$= \int_0^2 12t - 3t^3 - t \, dt$$

$$+ \int_0^2 t \, dt + \int_0^2 -12(2-t)\, dt$$

$$= \left[11\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}t^4 \right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 + \left[-24t + 6t^2 \right]_0^2$$

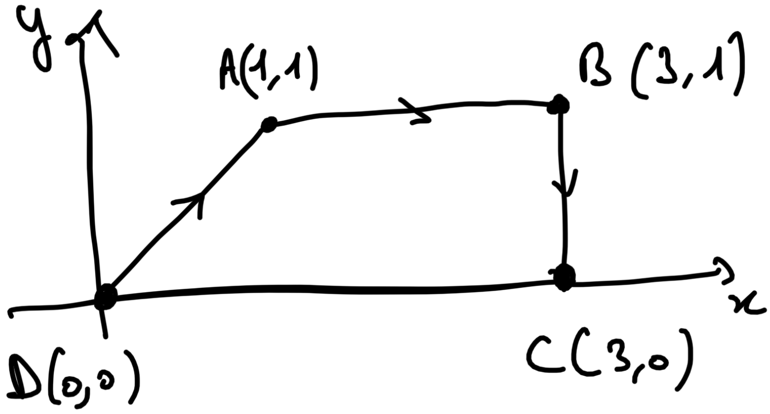
$$= \frac{11}{2} \times 4 - \frac{3}{4} \times 2^4 + \frac{4}{2} - 48 + 24$$

$$\boxed{= -12}$$

Ex 2

Calculer l'intégrale $\int_\gamma (x+2y)\,dx - 3xy\,dy$

où γ est la courbe suivante



$$\begin{cases} y = x & (0 \leq x \leq 1) \ [DA] \\ y = 1 & (1 \leq x \leq 3) \ [AB] \\ x = 3 & (1 \geq y \geq 0) \ [BC] \end{cases}$$

Correction :

- $\Gamma_{DA} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $\Gamma_{DA}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\Gamma_{AB} : [1,3] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma_{AB}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\Gamma_{BC} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 1-t \end{pmatrix}$, $\Gamma_{BC}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On note $\omega(x,y) = (x+2y)\,dx - 3xy\,dy$

- $\int_\gamma \omega = \int_{DA} \omega + \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega$

$$= \int_0^1 (t+2t)\times 1 - 3t\times t \times 1 \, dt$$

$$+ \int_1^3 (t+2\times 1)\times 1 - 3\times t\times 1\times 0 \, dt$$

$$+\int_0^1 [3+2(1-t)]\times 0 - 3\times 3(1-t)\times(-1)\,dt$$

$$= \int_0^1 3t - 3t^2\,dt + \int_1^3 (t+2)\,dt + \int_0^1 9(1-t)\,dt$$

$$= \left[3\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_1^3 + \left[-9\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1$$

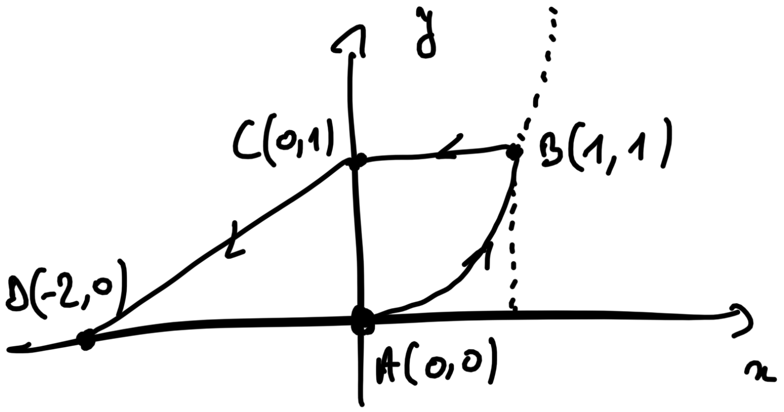
$$= \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \left(\frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2} - 2\right) + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 4 + 4 + \frac{9}{2} \; \boxed{= 13}$$

Ex 3

Calculer l'intégrale $\int_\gamma 3xy\,dx - (x+2)\,dy$

où γ est la courbe suivante



$$\begin{cases} y = x^2 \quad (0 \le x \le 1) \quad [AB] \\ y = 1 \quad (1 \ge x \ge 0) \quad [BC] \\ y = \dfrac{x+2}{2} \quad (1 \ge y \ge 0) \quad [CD] \end{cases}$$

càd $x = 2y - 2$

Correction : $\bullet$ $\Gamma_{AB} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{AB}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$\bullet$ $\Gamma_{BC} : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{BC}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bullet$ $\Gamma_{CD} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2(1-t) - 2 \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{CD}'(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note $\omega(x,y) = 3xy\,dx - (x+2)\,dy$

$\bullet$ $\int_\gamma \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega$

$$= \int_0^1 3 \times t \times t^2 \times 1 - (t+2) \times 2t \, dt$$
$$+ \int_0^1 3 \times (1-t) \times 1 \times (-1) - (1-t+2) \times 0 \, dt$$

$$+\int_0^1 3x - 2t \times (1-t) \times -2 \quad - (-2t+2) \times -1 \; dt$$

$$= \int_0^1 3t^3 - 2t^2 - 4t \; dt \; + \int_0^1 -3(1-t)\, dt$$

$$+ \int_0^1 12t - 12t^2 - 2t + 2 \; dt$$

$$= \left[3\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^3}{3} - 2t^2 \right]_0^1 + \left[3\,\frac{(1-t)^2}{2} \right]_0^1$$

$$+ \left[10\frac{t^2}{2} - 4t^3 + 2t \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - 2 - \frac{3}{2} + 5 - 4 + 2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9 - 8 - 6}{12} \; \boxed{= -\frac{5}{12}}$$

<u>Ex 4</u> On définit la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy$$

sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$

1) Montrer que ω est fermée sur U.
2) Montrer que ω est exacte.
3) Calculer $\int_\gamma \omega$ où γ est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A(1,2)$ et d'extrémité $B(3,8)$.

<u>Correction</u> : 1) On pose $a(x,y) = \frac{2x}{y}$

$b(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$

ω est fermée si $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$

Or ici $\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2}$ et $\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2}$

donc ω est fermée.

2) Trouvons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$df = \omega$ càd $df(x,y) = \frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy$

càd $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$

la première équation impose

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + C_1(y)$$

la seconde impose $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + C_2(x)$

Testons alors $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, f vérifie

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$ donc $df = \omega$

Donc ω est exacte.

3) D'après le cours comme ω est exacte, f C^1 et γ une courbe C^1 par morceaux joignant A à B

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(B) - f(A)$$
$$= \frac{3^2}{8} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{8} - \frac{1}{2}$$
$$\boxed{= \frac{5}{8}}$$