Théorie des Jeux
Master 1 Economie

Mickael Beaud
Maître de Conférences des Universités
Faculté d'Economie de l'Université de Montpellier
CEE-M (UMR: UM-CNRS-INRAE-MontpSupAgro)

Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr

Partie 2: Jeux dynamiques

- **Jeux séquentiels et induction à rebours**
- Equilibre de Nash parfait en sous-jeux
- Jeux à information incomplète

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans partie 1, nous nous sommes limités à l'étude de situations dans lesquelles les joueurs prenaient leurs décisions simultanément.

- Or, en pratique, on rencontre de nombreuses situations dans lesquelles les individus sont amenés à prendre des décisions de manière séquentielle.

- En théorie des jeux, ces situations dynamiques sont modélisées par les **jeux sous forme extensive** (ou **développée**). On parle également de **jeux séquentiels**.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- La formalisation d'un **jeu séquentiel** est plus lourde que celle d'un jeu statique.

- Plus précisément, l'écriture mathématique du modèle est plus difficile.

- Commençons donc par en donner une présentation simple.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- **Définition d'un jeu sous forme extensive**:

1. L'ensemble des joueurs.
2. L'ordre des coups (qui joue et quand?).
3. Les paiements des joueurs comme fonctions des coups qui ont été joués.
4. Quelles sont les actions possibles des joueurs dans les différents coups qu'ils sont amenés à jouer.
5. L'information dont chaque joueur dispose dans les différents coups qu'ils sont amenés à jouer.
6. Les probabilités associées à l'apparition d'évènements exogènes (indépendants des choix des joueurs).

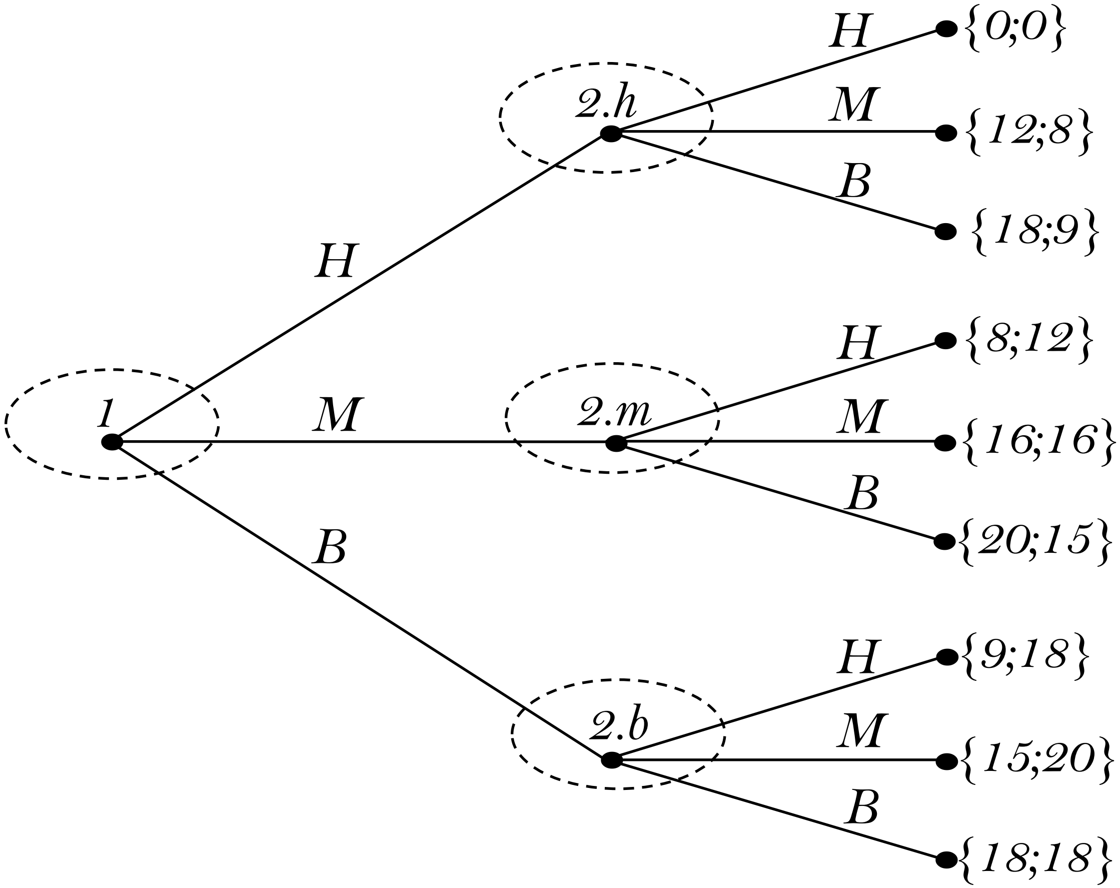
Jeux séquentiels et induction à rebours

- Graphiquement, les jeux sous forme extensive peuvent être commodément représentés sous la forme d'un arbre de décisions, appelé **arbre du jeu**.
- L'arbre du jeu est constitué de points (**nœuds de l'arbre**) et de segments de droite qui joignent certains de ces points (**branches de l'arbre**).
- Les branches de l'arbre représentent les actions possibles des joueurs.

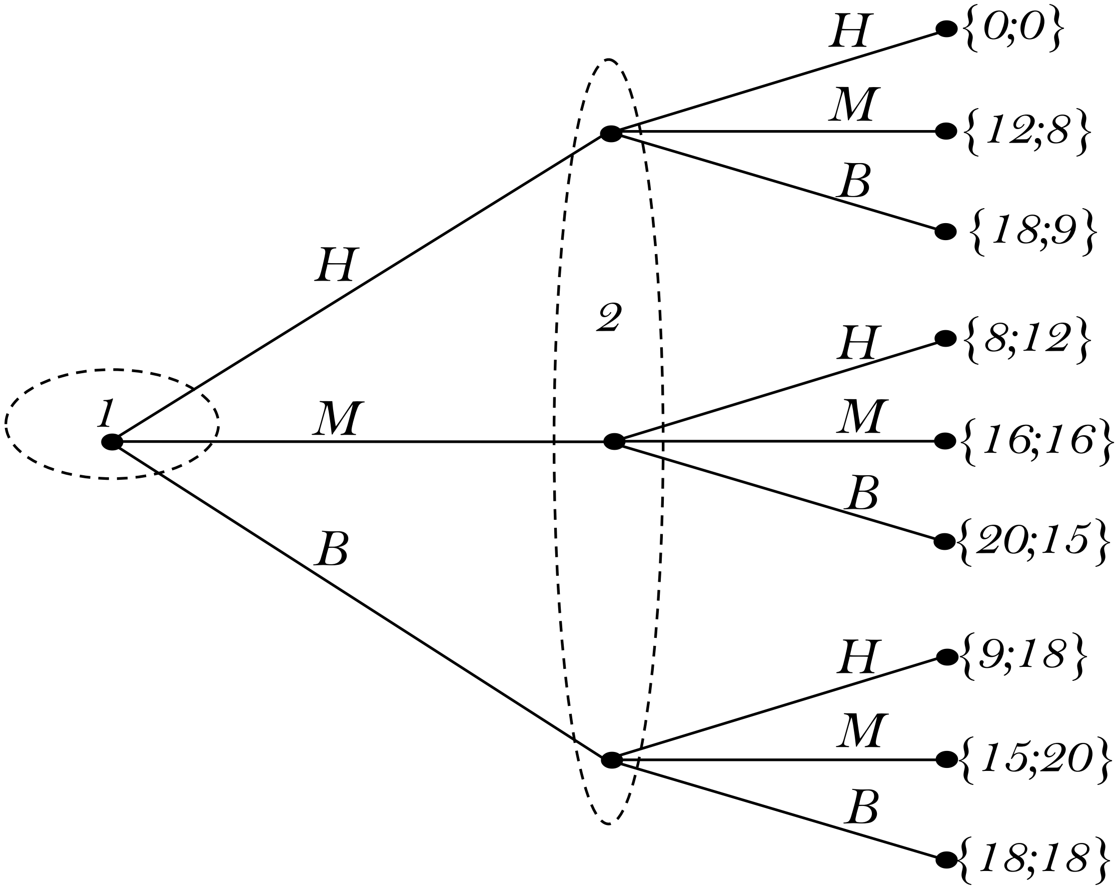
Jeux séquentiels et induction à rebours

- Le premier nœud de l'arbre est appelé la **racine de l'arbre**. Il n'a pas de prédécesseurs et représente donc le début du jeu (le premier coup).
- Les derniers nœuds de l'arbre sont les **nœuds terminaux**. Ils n'ont pas de successeurs et représentent les différentes issues possibles du jeu.
- Les nœuds non terminaux sont des **nœuds décisionnels**, ils représentent les différents moments du jeu où les joueurs prennent des décisions.

❖ Exemple. Duopole de Stackelberg.



Exemple. Duopole de Cournot.



Jeux séquentiels et induction à rebours

- Les ensembles en traits pointillés représentent les **ensembles d'information** des joueurs.

- Dans le **duopole de Stackelberg**, le leader dispose d'un seul ensemble d'information, mais le suiveur possède trois ensembles d'information distincts, car le suiveur observe la production du leader avant de prendre sa décision: *2.h* (info = le leader a joué H), *2.m* (info = le leader a joué M) ou *2.b* (info = le leader a joué B).

- Dans le **duopole de Cournot**, chaque joueur possède un unique ensemble d'information (info=l'autre joueur peut jouer H, M ou B).

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans le **duopole de Stackelberg**, à chaque nœud décisionnel correspond un ensemble d'information.

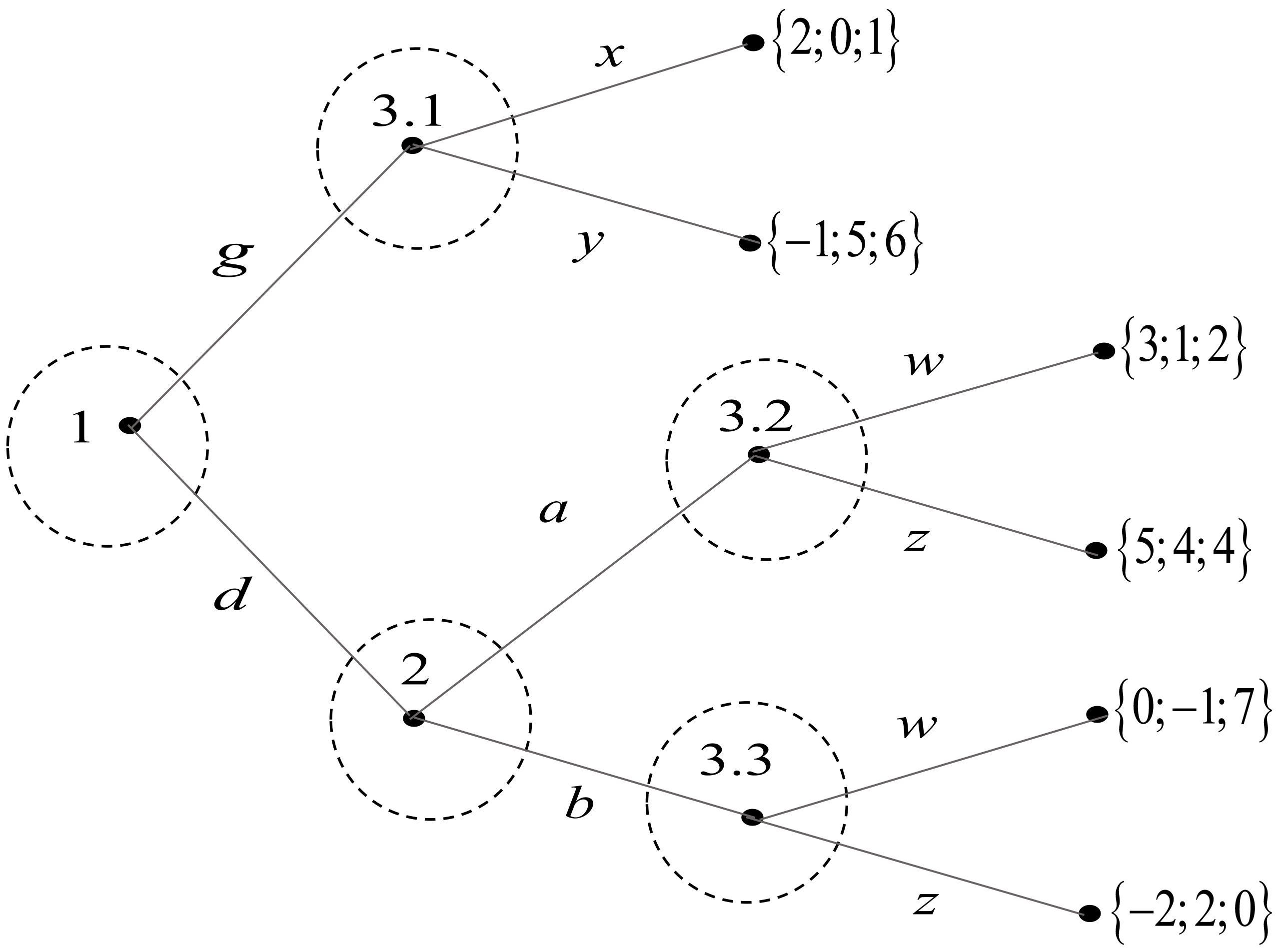
- C'est le cas pour tous les jeux dynamiques à **information complète et parfaite** (où tous les coups joués sont observés)

- Dans ces jeux, deux nœuds décisionnels ne peuvent appartenir au même ensemble d'information (sinon cela signifierait que des coups joués précédemment par les autres joueurs ne sont pas observés).

- A chaque fois qu'un joueur est amené à prendre une décision, il sait exactement où il se situe sur l'arbre du jeu puisqu'il a pu observer tous les coups qui ont été joués depuis le début du jeu.

Jeux séquentiels et induction à rebours

❖ **Exemple. Jeu à information complète et parfaite à trois joueurs:**



Jeux séquentiels et induction à rebours

- **Exemple. Jeu à information complète mais imparfaite (Poker simplifié):**

- Deux joueurs, J1 et J2, placent chacun 1 euro dans un pot (comme mise de départ). J1 tire une carte d'un sabot (contenant autant de cartes rouges que de cartes noires) et la consulte de manière privée. Il peut alors miser un Euro supplémentaire (action *M*) ou se coucher (action *C*).

  - Si J1 se couche, sa carte n'est pas découverte, le jeu se termine et J2 remporte le pot. Les paiements sont $\{-1;1\}$.

  - Si J1 mise, le jeu continue et c'est au tour de J2 de parler.

Jeux séquentiels et induction à rebours

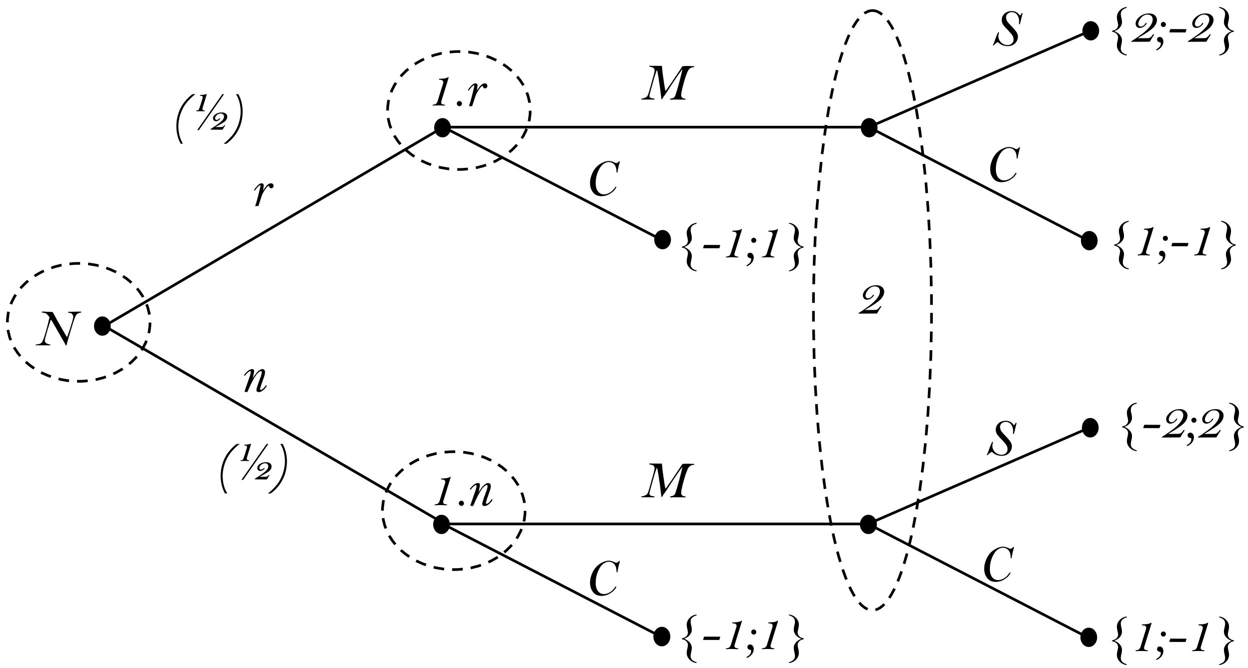
- **Poker simplifié (suite).**

- Si J1 mise 1 euro, J2 peut suivre en ajoutant également 1 euro (action *S*) ou se coucher (action *C*).

  - Si J2 se couche, la carte de J1 n'est pas découverte, le jeu se termine, et J1 remporte le pot. Les paiements sont $\{1;-1\}$.

  - Si J2 suit la mise de J1, ce dernier doit montrer sa carte, le jeu se termine, et J1 (resp. J2) remporte le pot si la carte est rouge (resp. noire). Les paiements sont $\{2;-2\}$ (resp. $\{-2;2\}$).

- **Exemple. Jeu à information complète mais imparfaite (Poker simplifié):**



- Ce jeu de poker est un exemple de **jeu dynamique à information complète mais imparfaite**. Ici, c'est la nature (ou le sort) qui introduit l'incertitude et non la simultanéité des décisions (comme dans le modèle statique de Cournot).

Jeux séquentiels et induction à rebours

- J1 dispose de deux ensembles d'information distincts.
  - En effet, comme J1 est informé de la couleur de sa carte, il sait s'il se situe en *1.r* (info = la carte est rouge/forte) ou *1.n* (info = la carte est noire/faible).

- Par contre, J2 ne possède qu'un ensemble d'information même s'il observe l'action de J1.
  - J2 est incapable de distinguer ses deux nœuds décisionnels car il ne connaît pas la couleur de la carte de J1.
  - J2 sait que J1 a misé, mais il ne sait pas si J1 mise avec une carte rouge ou avec une carte noire (bluff!).

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans tous les jeux dynamiques, pour que le modèle soit cohérent, les actions possibles des joueurs doivent nécessairement être identiques à tous les nœuds décisionnels appartenant à un même ensemble d'information.

   - Par exemple, dans le jeu de poker, si l'on ajoute une action possible a J2 lorsque la carte est rouge, alors on doit en faire autant si la carte est noire.

   - Il serait en effet incohérent de considérer que J2 puisse adopter des actions différentes selon que la carte est rouge ou noire car cela signifierait qu'il peut observer la couleur de la carte de J1.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- On appelle **chemin** le long d'un arbre de jeu un ensemble de branches contiguës (une par coup), dont la première est issue de la racine, et dont la dernière aboutit à un des nœuds terminaux.

  - Un chemin se présente donc sous la forme d'une **ligne brisée** formée par des branches de l'arbre.

  - A l'issue du chemin, on donne les paiements des joueurs quand leurs actions sont celles qui correspondent aux branches du chemin.

  - Les paiements des joueurs sont généralement écrits (de gauche à droite ou de haut en bas) dans le même ordre que celui avec lequel les joueurs interviennent.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans les arbres de jeu, deux règles ne sont jamais violées:

1. Il y a au moins une branche qui part de chaque nœud décisionnel (non terminal). Le joueur concerné par un nœud a au moins une action possible.
2. Il aboutit au plus une branche à chaque nœud.

- Il résulte de ces deux règles, qu'en partant de n'importe quel nœud de l'arbre, il existe une et une seule manière de remonter jusqu'à la racine.
    - A chaque nœud terminal correspond un et un seul chemin permettant de remonter jusqu'à la racine, ce chemin ne passant jamais deux fois par le même nœud.

Jeux séquentiels et induction à rebours

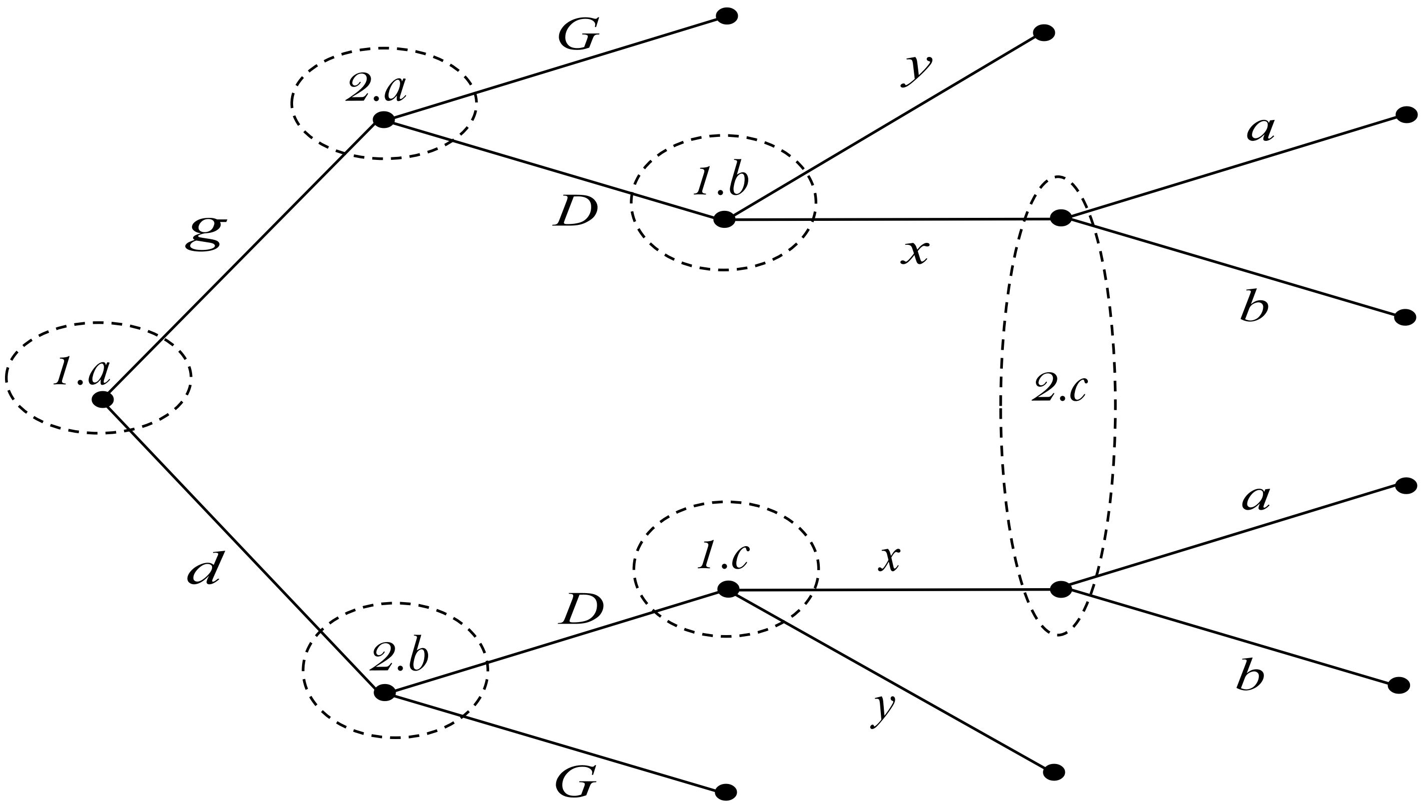
- Enfin, une restriction importante que l'on impose dans les jeux dynamiques est que les joueurs possèdent une **mémoire parfaite**.

- Cette condition signifie simplement qu'un joueur n'oublie jamais ce qu'il a appris.

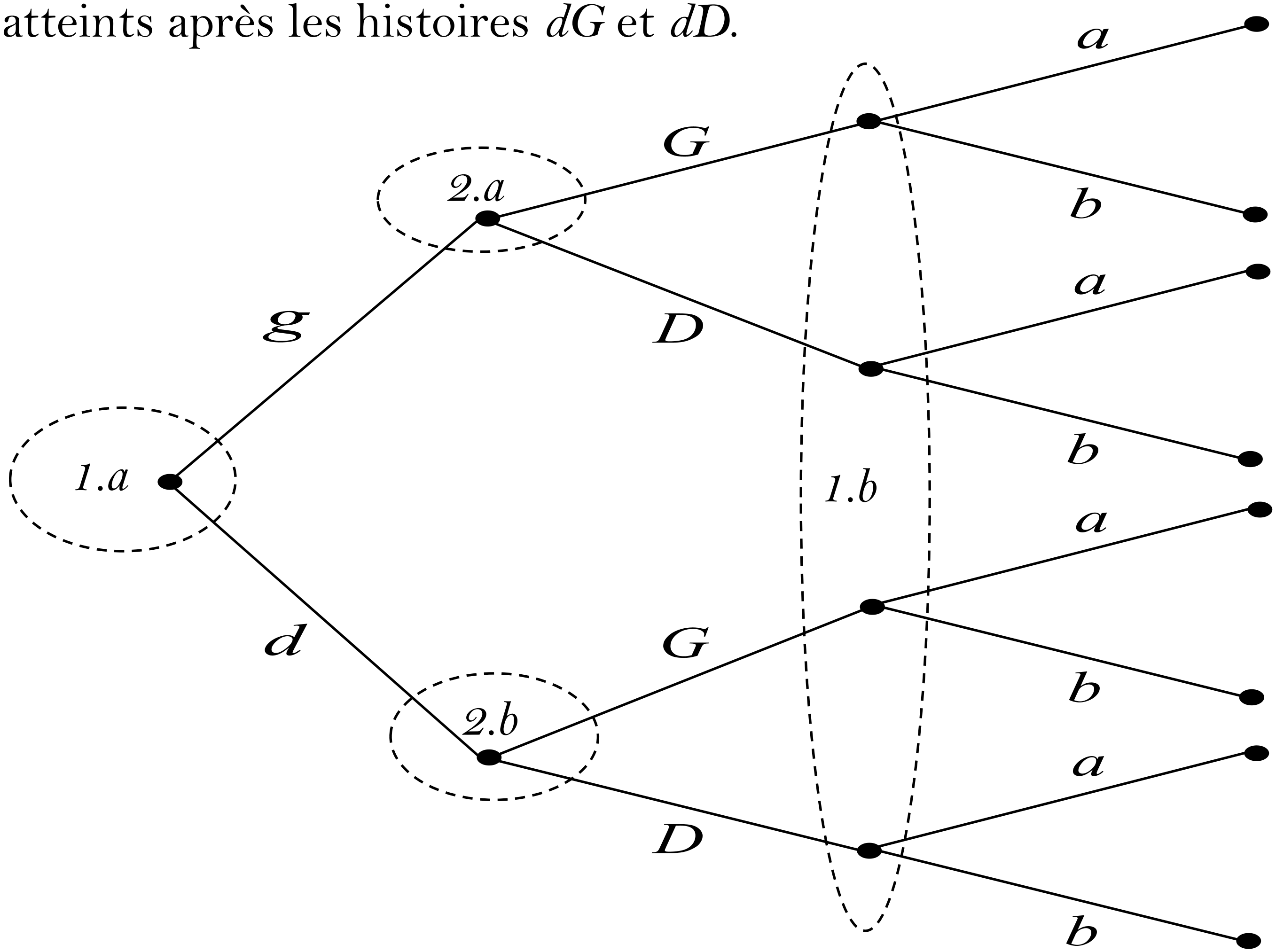
- A chaque coup, chaque joueur se souvient parfaitement de ce qu'il a joué aux coups précédents et de ce qu'on joué les autres (lorsqu'il a pu observer ces coups).

- Dans les deux jeux présentés ci-dessous, cette condition n'est pas vérifiée.

- Au dernier coup, J2 oublie le choix effectué par J1 au premier coup alors qu'il l'avait observé (distinction entre 2.a et 2.b). Les nœuds atteints après les histoires *gDx* et *dDx* devraient appartenir à deux ensembles d'information distincts.



- Au dernier coup, J1 oublie le choix qu'il a lui-même effectué au premier coup. Les nœuds atteints après les histoires *gG* et *gD* devraient appartenir à un ensemble d'information distinct de ceux atteints après les histoires *dG* et *dD*.



Jeux séquentiels et induction à rebours

- Nous allons voir que dans les **jeux dynamiques à information complète et parfaite**, il existe un algorithme de résolution simple permettant de déterminer l'**EN** dit **parfait**, car il satisfait la contrainte de **rationalité séquentielle**;
  - une stratégie est séquentiellement rationnelle dans un ensemble d'information si elle spécifie une action rationnelle lorsque cet ensemble d'information est effectivement atteint.

- Il s'agit de la résolution par **induction à rebours** ou **récurrence vers l'amont**, ou encore l'**algorithme de Kuhn**.
  - On commence par considérer le dernier coup du jeu. Après avoir déterminé le choix optimal du joueur intervenant au dernier coup, on en déduit le choix optimal du joueur à l'avant dernier coup et ainsi de suite. Cette méthode repose sur l'hypothèse de **connaissance commune de la rationalité.**

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Vérifier la **rationalité séquentielle** d'une stratégie consiste à s'assurer que le joueur jouerait effectivement ce qu'il a prévu dans un ensemble d'information si cet ensemble d'information était atteint en jouant le jeu.

  - Dans un contexte dynamique, le concept d'**EN** a la faiblesse de ne pas exclure les stratégies incluant des actions non crédibles.

  - En imposant la rationalité séquentielle, on **raffine** le concept d'EN en imposant une condition supplémentaire. Lorsque la condition de rationalité est vérifiée par un **EN**, on dit qu'il est **parfait**, et on le note **ENP**.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Ainsi, les jeux dynamiques peuvent admettre un grand nombre d'**EN** et, parmi eux, des équilibres incluant des décisions irrationnelles or du chemin d'équilibre.

  - Le problème découle du fait qu'un **EN** garantit seulement des décisions rationnelles aux nœuds situés sur le chemin d' équilibre.

  - Si l'on s'écarte du chemin d'équilibre, les stratégies d'**EN** peuvent engendrer toutes sortes de comportements irrationnels.

Jeux séquentiels et induction à rebours

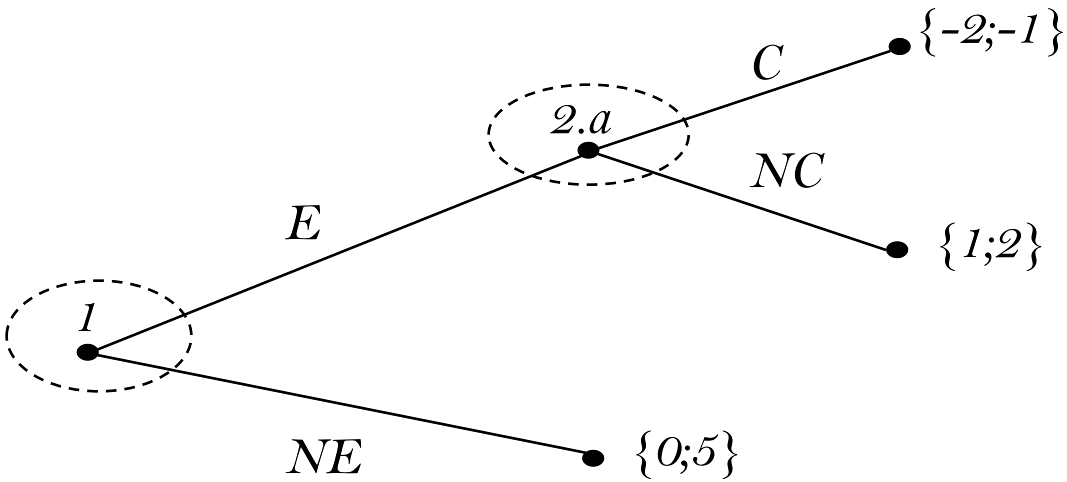
- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel:**

Considérons deux entreprises. L'entreprise J2 est en situation de monopole sur le marché, tandis que l'entreprise J1 est un entrant potentiel. J1 joue en premier et choisit d'entrer (E) ou non (NE) sur le marché. J2 joue ensuite, après avoir observé l'entrée éventuelle du concurrent, et peut adopter deux attitudes:

- Combattre (C) en inondant le marché pour faire chuter sensiblement le prix de marché et tenter de mettre l'entrant en faillite.
- Ne pas combattre (NC) et baisser sa production afin que l'entrée de l'entreprise 1 ne face pas chuter le prix de marché et son profit.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel.**



Entrant J1 \ Monopole J2	C	NC
E	$-2\ ;\ -1$	ENP $\underline{1}\ ;\ \underline{2}$
NE	EN $\underline{0}\ ;\ \underline{5}$	$0\ ;\ \underline{5}$

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans les jeux dynamiques, une stratégie pure d'un joueur est une **stratégie conditionnelle** qui spécifie son choix à chaque ensemble d'information (et non pas à chaque nœud décisionnel puisque le joueur ne peut distinguer les nœuds décisionnels au sein d'un même ensemble d'information).

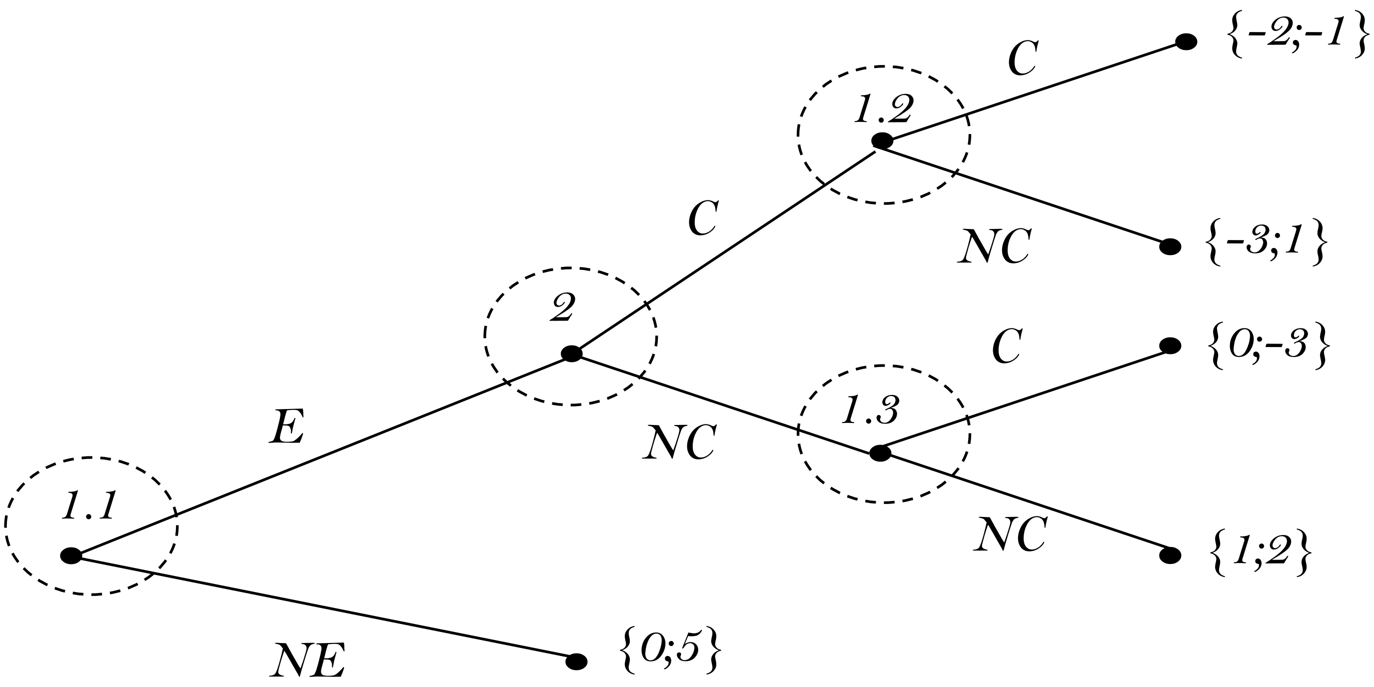
- On parle de **stratégie conditionnelle** dans la mesure où chaque action prévue est conditionnée par le déroulement du jeu.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Ainsi, une stratégie pure d'un joueur s'interprète comme un **plan d'action** qui spécifie **une action à chaque ensemble d'information**.
- On peut considérer que le joueur planifie sa stratégie avant de jouer effectivement le jeu. Une autre personne disposant du plan pourrait tout à fait jouer à sa place.
- Pour un joueur disposant de I ensembles d'information, une stratégie conditionnelle est un vecteur à I éléments, le premier élément spécifiant l'action prévue dans le premier ensemble d'information, le second élément spécifiant l'action prévue dans le deuxième ensemble d'information, etc.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel avec un coup supplémentaire.**



- A_1 = {E.C.C, E.C.NC, E.NC.C, E.NC.NC, NE.C.C, NE.C.NC, NE.NC.C, NE.NC.NC} et A_2 = {C , NC}.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- Dans le jeu de poker simplifié, J1 dispose de deux ensembles d'information (*1.r* et *1.n*) et de deux actions possibles à chacun de ces ensembles (*M* et *C*). Le J2 dispose d'un seul ensemble d'information (*2*) et de deux actions possibles (*S* et *C*) dans cet ensemble.

- L'ensemble des stratégies conditionnelles de J1 est A_1={*M.M*, *M.C*, *C.M*, *C.C*} tandis que celui de J2 est A_2={*S*, *C*}.

Jeux séquentiels et induction à rebours

- **Remarque. Force de l’engagement.**

  Supposons que dans le **jeu de l’entrant potentiel**, le monopole en place (J2) n’a d’autre choix que de combattre après l’entrée d’un concurrent (J1).

  Dans ce cas, J1 n’a pas intérêt à entrer sur le marché, et J2 conserve sa position de monopole.

  Si J2 a la possibilité de s’engager à combattre tout concurrent, et de le faire savoir, il peut décourager l’entrée d’un concurrent potentiel.

Partie 2: Jeux dynamiques

- Jeux séquentiels et induction à rebours
- **Equilibre de Nash parfait en sous-jeux**
- Jeux répétés à horizon fini
- Jeux répétés à horizon infini
- Jeux à information incomplète

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Dans les jeux dynamiques à information complète et **parfaite**, il est relativement simple de trouver l'**ENP** en raisonnant par induction à rebours (trouver tous les **EN** peut se révéler difficile mais c'est en quelque sorte inutile).

- Dans les jeux dynamiques à information complète mais **imparfaite**, on identifie d'abord les sous-jeux (des parties du jeu qui peuvent être considérées et résolues de manière indépendante).

- On applique l'algorithme de Kuhn en **résolvant les sous-jeux les plus en aval du jeu** (on remplace ces derniers par les paiements à leur **EN**), puis on remonte jusqu'au début du jeu.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- La méthode de résolution pour les jeux dynamique à information complète mais imparfaite est la même que pour les jeux à information parfaite, mais **les sous-jeux sont moins triviaux à résoudre**.

- Les sous-jeux à résoudre peuvent par exemple être des jeux statiques correspondant à des coups simultanés dans le jeu dynamique.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

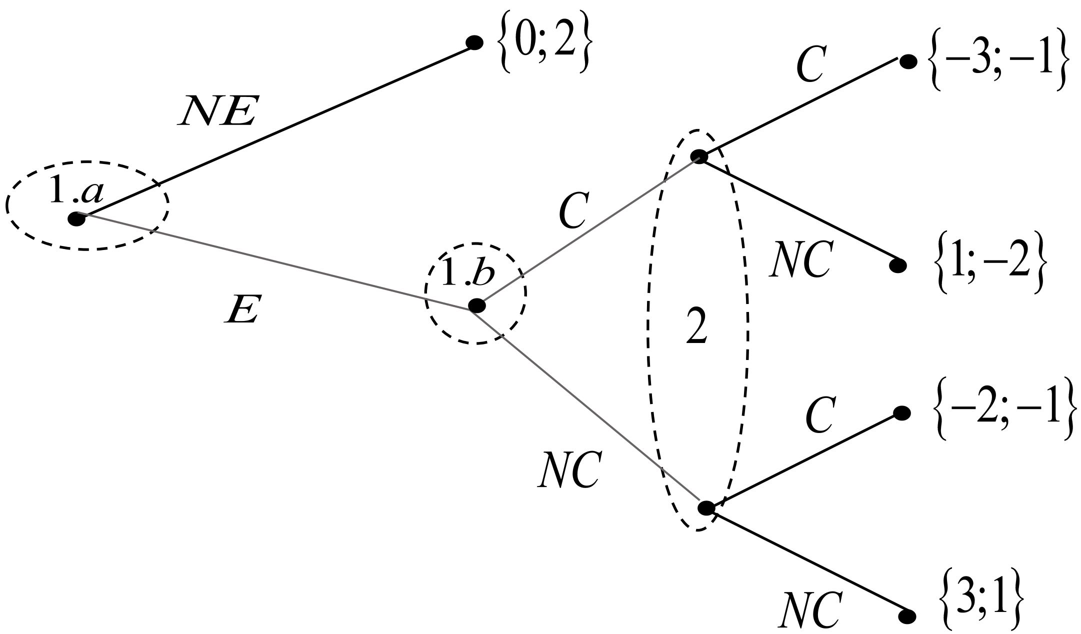
- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel avec coup simultané:**

On considère la même situation que précédemment dans le jeu de l'entrant potentiel, sauf que désormais les entreprises jouent un coup supplémentaire après l'entrée de l'entreprise 1 (si tel est le cas). Ce coup est simultané. Les entreprises peuvent combattre (C) ou non (NC).

Ce jeu est désormais à **information complète mais imparfaite**. Au moment où J2 doit prendre une décision, il sait que J1 est entré, mais J2 ne sait pas si J1 a décidé de combattre ou non. De même, J1 ne sait pas si J2 a décidé de combattre ou non lorsqu'il prend sa décision.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel avec coup simultané:**



Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel avec coup simultané:**

  - On ne peut pas résoudre ce jeu aussi simplement que le jeu de l'entrant potentiel précédent. En effet, on ne peut pas déterminer le choix des joueurs au second coup car ce coup est simultané.

  - On peut toutefois appliquer la méthode de résolution par induction à rebours en commençant par résoudre le sous-jeu commençant au nœud en *1.b* (qui devient la racine du sous-jeu simultané).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Définition d'un sous-jeu:**
  - Un sous-jeu Gi d'un jeu sous forme extensive G est un jeu sous forme extensive de nœud initial x appartenant à l'ensemble des nœuds non terminaux de G. L'ensemble des nœuds non initiaux de Gi est le sous ensemble des nœuds successeurs de x dans G, où les joueurs, les actions, les ensembles d'information, ainsi que les paiements associés aux nœuds terminaux sont les mêmes que dans le jeu d'origine G.

  - Remarquons que cette définition n'exclut pas le jeu *G* comme sous-jeu de *G*. Autrement dit, un jeu peut être son propre sous-jeu. Ainsi, on parle de **sous-jeu strict ou propre** d'un jeu *G* lorsque le sous-jeu *Gi* est différent de *G*. De plus, le nœud initial d'un sous-jeu doit être le seul nœud dans son ensemble d'information.

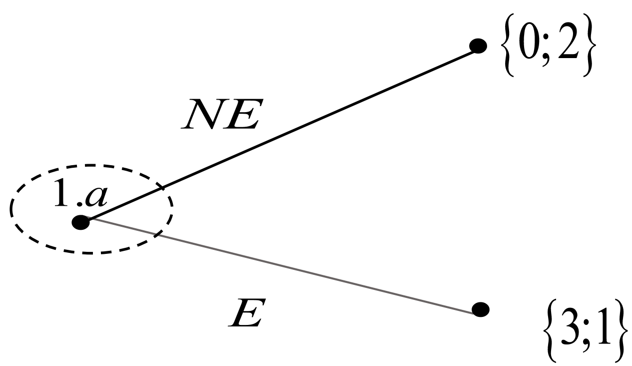
Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Dans l'exemple précédent, le jeu admet un sous-jeu strict. Commençons donc par résoudre ce dernier. La forme stratégique du sous-jeu est la suivante:

		Joueur 2	
		C	**NC**
Joueur 1	**C**	*-3 ; <u>-1</u>*	*1 ; -2*
	NC	*<u>-2</u> ; -1*	*EN* *<u>3</u> ; <u>1</u>*

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- L'unique **EN** du sous-jeu est (NC;NC) avec les paiements (3,1). Après avoir remplacé le sous-jeu par les paiements à cet équilibre (on suppose que les joueurs anticipent que si ce sous-jeu est atteint, l'**EN** sera l'issue), on obtient:



- Au premier coup, l'entreprise 1 choisit donc d'entrer (3>0). L'**ENP** (en sous-jeux) est donc (E.NC,NC).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- L'équilibre (E.NC ; NC) est donc à la fois un **EN** du jeu et de ses sous-jeux. On qualifie cet équilibre d'ENP **en sous-jeux** (concept de solution introduit par Selten (1965)).
- On aurait également pu résoudre en étudiant la forme stratégique du jeu, et nous aurions obtenu trois **EN** :

		Joueur 2	
		C	**NC**
Joueur 1	**NE NC**	*EN* $\underline{0}$; $\underline{2}$	0 ; $\underline{2}$
	NE C	*EN* $\underline{0}$; $\underline{2}$	0 ; $\underline{2}$
	E NC	-2 ; -1	*ENP* $\underline{3}$; $\underline{1}$
	E C	-3 ; $\underline{-1}$	1 ; -2

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple. Jeu de l'entrant potentiel avec coup simultané (Variante choix de niche de marché):**

On considère une version modifiée du jeu de l'entrant potentiel. Désormais, plutôt que de choisir entre combattre ou non pour le marché, les entreprises choisissent d'occuper une niche dans le marché.

Il existe deux niches dans le marché, une petite et une grande. Par exemple, les niches peuvent correspondre à deux types de consommateurs et les entreprises choisissent quel type de consommateur elles vont cibler à travers le design de leur produit.

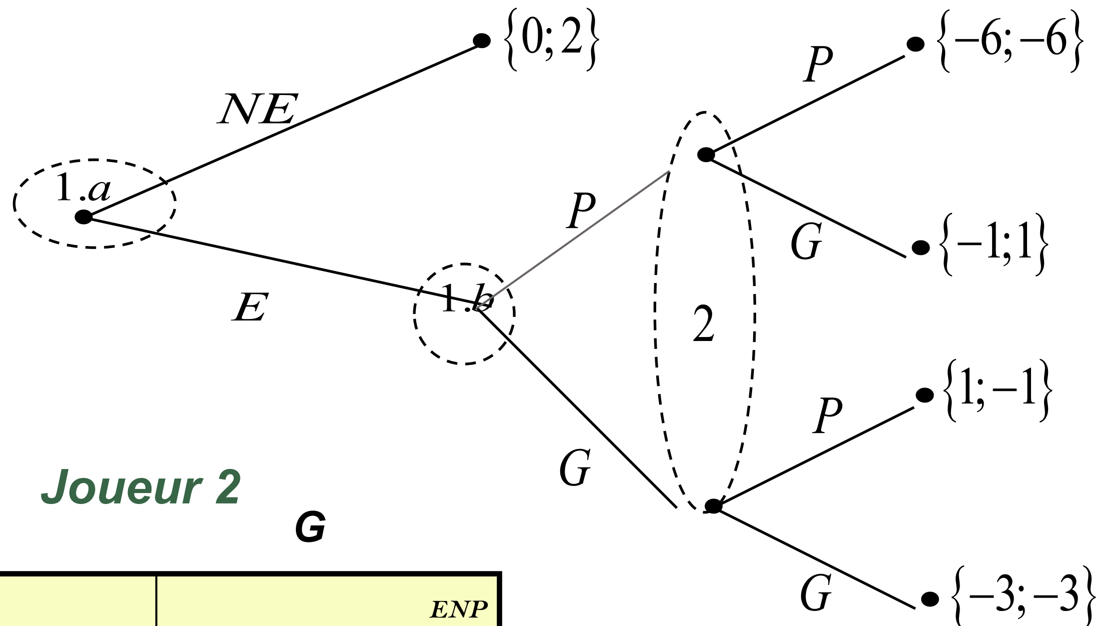
Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

Après l'entrée de l'entreprise 1, les deux entreprises décident simultanément quelle niche occuper, la petite (action P) ou la grande (action G).

Les deux entreprises perdent de l'argent si elles choisissent la même niche, et cette perte est plus forte si elles choisissent la petite niche (plutôt que la grande).

Si elles choisissent des niches différentes, celle qui occupe la grande réalise un profit positif. Par contre, celle qui occupe la petite réalise une perte, mais cette perte est toutefois plus faible que si les firmes choisissent la même niche (que ce soit la grande ou la petite).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux



Joueur 2

Joueur 1		P	G
	NE P	0 ; 2	ENP 0 ; 2
	NE G	0 ; 2	EN 0 ; 2
	E P	-6 ; -6	-1 ; 1
	E G	ENP 1; -1	-3 ; -3

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Le jeu admet un sous-jeu strict. On trouve deux **EN** dans ce sous-jeu:

		Joueur 2	
		P	G
Joueur 1	P	*-6 ; -6*	*<u>-1</u> ; <u>1</u>* EN
	G	*<u>1</u> ; <u>-1</u>* EN	*-3; -3*

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Dans un premier temps, considérons que les entreprises vont se coordonner sur le premier **EN** du sous-jeu (P; G). Au premier coup, l'entreprise 1 sait que si elle entre elle obtient *-1*, tandis que si elle n'entre pas elle obtient *0*. Elle décide donc de ne pas entrer (*0*>*-1*). Ainsi, (NE P; G) est un **ENP** (en sous-jeux).

- Considérons maintenant que les entreprises vont se coordonner sur le second **EN** du sous-jeu *(*G; P). Au premier coup, l'entreprise 1 sait que si elle entre, elle obtiendra *1* et *0* sinon. Elle décide donc d'entrer. Ainsi, (E G; P) est un **ENP** en sous-jeux.

- Ainsi, le critère perfection (en sous-jeux) ne permet pas toujours de résoudre le problème de multiplicité des équilibres de Nash.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Remarque:**
  - On peut préférer **ENP2** car il est compatible avec un raisonnement par **induction vers l'avant** (ou vers l'aval).
    - En effet, si l'entreprise 1 décide d'entrer sur le marché, elle renonce à un paiement de *0*.
    - Mais si elle entre et choisit P, alors elle obtient toujours (quel que soit le choix de l'entreprise *2*) un paiement strictement négatif (*-6* ou *-1*).
    - De ce fait, si l'entreprise *2* observe que l'entreprise 1 est entrée, alors elle devrait s'attendre à ce que l'entreprise 1 choisisse G (pour tenter d'obtenir un paiement strictement positif égal à *1*), et choisira donc P (car $-1>-3$).
    - Si l'entreprise 1 comprend ce raisonnement, elle va entrer en jouant G et obtenir un paiement égal à *1* (supérieur au paiement égal à *0* obtenu en n'entrant pas).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

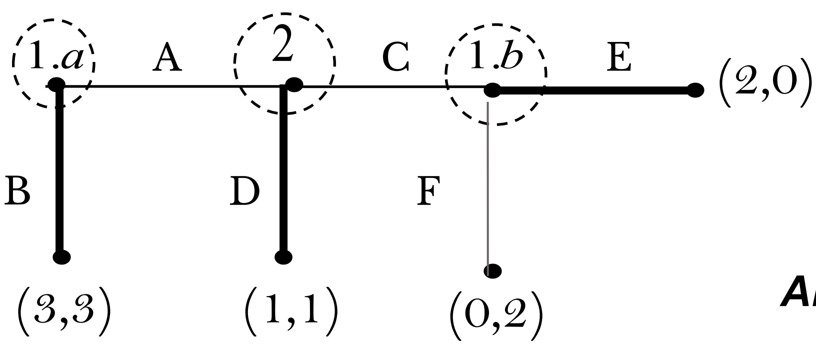
- **Remarque:**
- Le raisonnement par **induction vers l'avant** que nous venons d'effectuer correspond à un ordre d'élimination itérative des stratégies dominées (incluant une relation de dominance faible).

1. Pour l'entreprise 1, EP est strictement dominée par NE P et NE G (car $0>-6$ et $0>-1$).
2. Pour l'entreprise 2, G est alors faiblement dominée par P (car $2=2$, $2=2$ et $-3<-1$).
3. Finalement, pour l'entreprise 1, NE P et NE G sont strictement dominées par EG (car $0<1$).

- Noter que si nous avions éliminé uniquement des stratégies **strictement dominées**, alors il aurait été impossible de voir disparaître un **EN**, qu'il soit parfait ou non. En effet, l'ensemble des stratégies d'EN est inclus dans **l'ensemble des stratégies qui résistent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées**.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

❖ **Exemple: Limite de la dominance faible et induction vers l'avant**



Joueur 2

Joueur 1

	C	D
AE	$2 ; 0$	$1 ; \underline{1}$
AF	$0 ; \underline{2}$	$1 ; 1$
BE	$\underline{3} ; \underline{3}$ EN	$\underline{3} ; \underline{3}$ ENP
BF	$\underline{3} ; \underline{3}$ EN	$\underline{3} ; \underline{3}$ EN

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple: Limite de la dominance faible et induction vers l'avant**

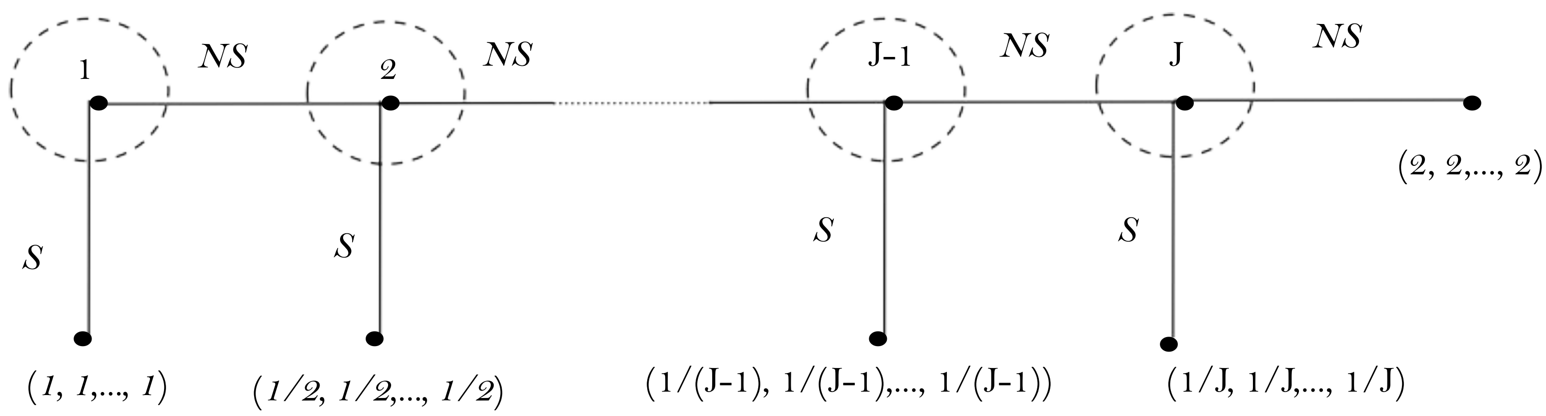
  - Il existe un ordre d'élimination incluant des stratégies faiblement dominées qui supprime l'unique **ENP**=(BE ; D).

1. AE est strictement dominée par BE et BF (car $2<3$ et $1<3$).
2. D est faiblement dominée par C (car $1<2$ et $3=3$ et $3=3$).
3. AF est strictement dominée par BE et BF (car $0<3$ et $1<3$).

  - L'induction vers l'avant est inopérante ici. Impossible de rationaliser le choix A pour le joueur 1 au premier coup (car $3>1$, $3>0$ et $3>2$).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

❖ **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre J de joueurs**



ENP = (NS; NS; …; NS).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre J de joueurs**

- Si l'on applique la méthode de l'**induction à rebours**, on peut prédire que tous les joueurs vont choisir *NS*. En effet, le joueur *J* choisira toujours *NS* (car $2>1/J$), le joueur $J-1$ choisira donc *NS* (car $2>1/(J-1)$) et ainsi de suite jusqu'au joueur 1. Lorsque *J* est petit, on peut considérer que cette issue est clairement raisonnable.

- Toutefois, plus *J* est grand, plus le risque d'obtenir un gain plus faible en jouant *NS* augmente pour chaque joueur. Pour obtenir le paiement égal à deux, chaque joueur sait qu'il est impératif que tous les autres joueurs choisissent *NS*. Même si un seul joueur se trompe, personne n'obtiendra ce paiement de *2*.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

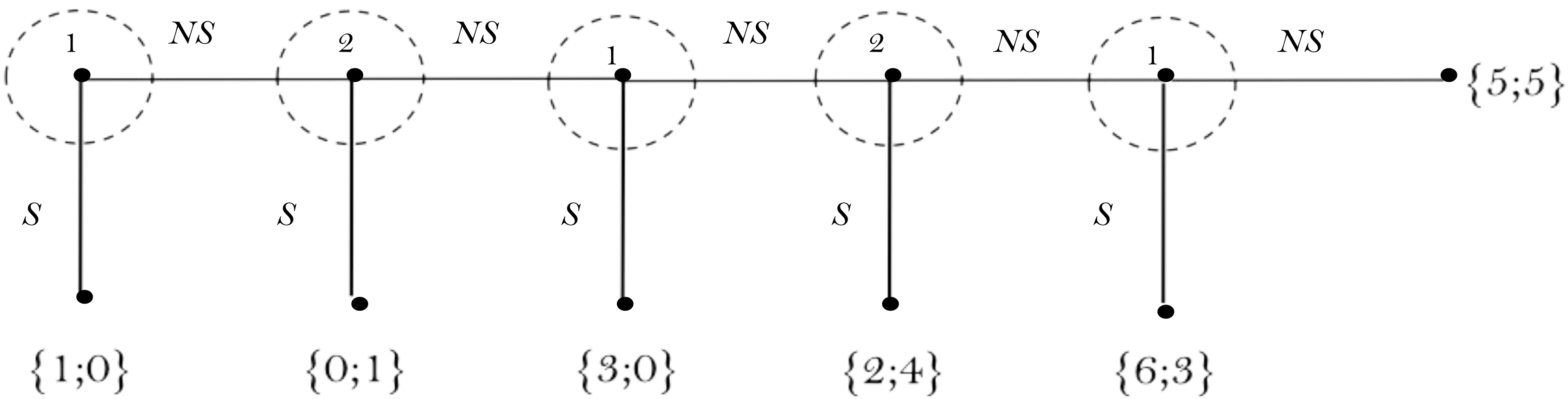
- **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre J de joueurs**

- Si un joueur a peur qu'un joueur jouant après lui se trompe, il jouera *S*. De plus, si un joueur pense qu'au moins un joueur jouant après lui pense cela, il jouera également *S*.

- L'**ENP** nécessite que la rationalité des joueurs soit **connaissance commune**. Or lorsque les joueurs sont très nombreux, il n'est pas évident que cette hypothèse soit vérifiée.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre coups joués**



- **ENP** = (SSS; SS).

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre coups joués**

- Mettons nous à la place du joueur 2 et imaginons que, contrairement à ce à quoi il pouvait s'attendre, il observe que le joueur 1 a joué NS au premier coup. Que feriez-vous à sa place?
- Le principe de l'induction à rebours vous conduirait à jouer S car si vous laissez rejouer le joueur 1, il choisira S.
- Toutefois, ce même principe vous apprend également que le joueur 1 aurait dû jouer S au premier coup.
- Si vous interprétez ce choix comme une erreur, vous devez jouer S. Mais vous pouvez également l'interpréter comme le signal que le joueur 1 veut continuer le jeu et gagner plus.
- Ainsi, votre choix doit dépendre de votre prédiction sur le choix du joueur 1 au prochain coup.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple: Critique de l'ENP avec un grand nombre coups joués**

- Si vous pensez que le joueur 1 va jouer *NS* au second coup avec une probabilité supérieure à ¼ , vous devriez jouer *NS*.
- Ainsi, contrairement au principe de l'induction à rebours, jouer *NS* peut tout à fait être un bon pari.
- Or comme la théorie écarte la possibilité que le joueur 1 puisse choisir *NS* au premier coup, elle n'est pas en mesure d'expliquer comment les joueurs se comportent dans une telle éventualité.
- Une théorie complète ne devrait donc pas assigner une probabilité nulle à certaines séquences de jeu, mais plutôt considérer que toutes les séquences sont possibles. Pour compléter la théorie, on peut notamment intégrer la possibilité que les joueurs commettent des erreurs.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Comment résoudre un jeu dynamique lorsqu'il n'existe pas de sous-jeu strict, comme dans le jeu de poker simplifié?

- On commence par définir les stratégies des joueurs comme des plans d'actions (stratégies conditionnelles).

- On peut alors représenter le jeu sous forme stratégique (matrice des paiements) et chercher les **EN**.

- Tous les **EN** obtenus sont alors parfaits en sous-jeux dans ce cas.

Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

- **Exemple. Poker simplifié:**

Joueur 1		Joueur 2: (⅔) S	Joueur 2: (⅓) C
	(⅓) **MM**	0 ; <u>0</u>	<u>1</u> ; -1
	(⅔) **MC**	<u>½</u> ; -½	0 ; <u>0</u>
	(0) **CM**	-3/2 ; <u>3/2</u>	0 ; 0
	(0) **CC**	-1 ; <u>1</u>	-1 ; <u>1</u>

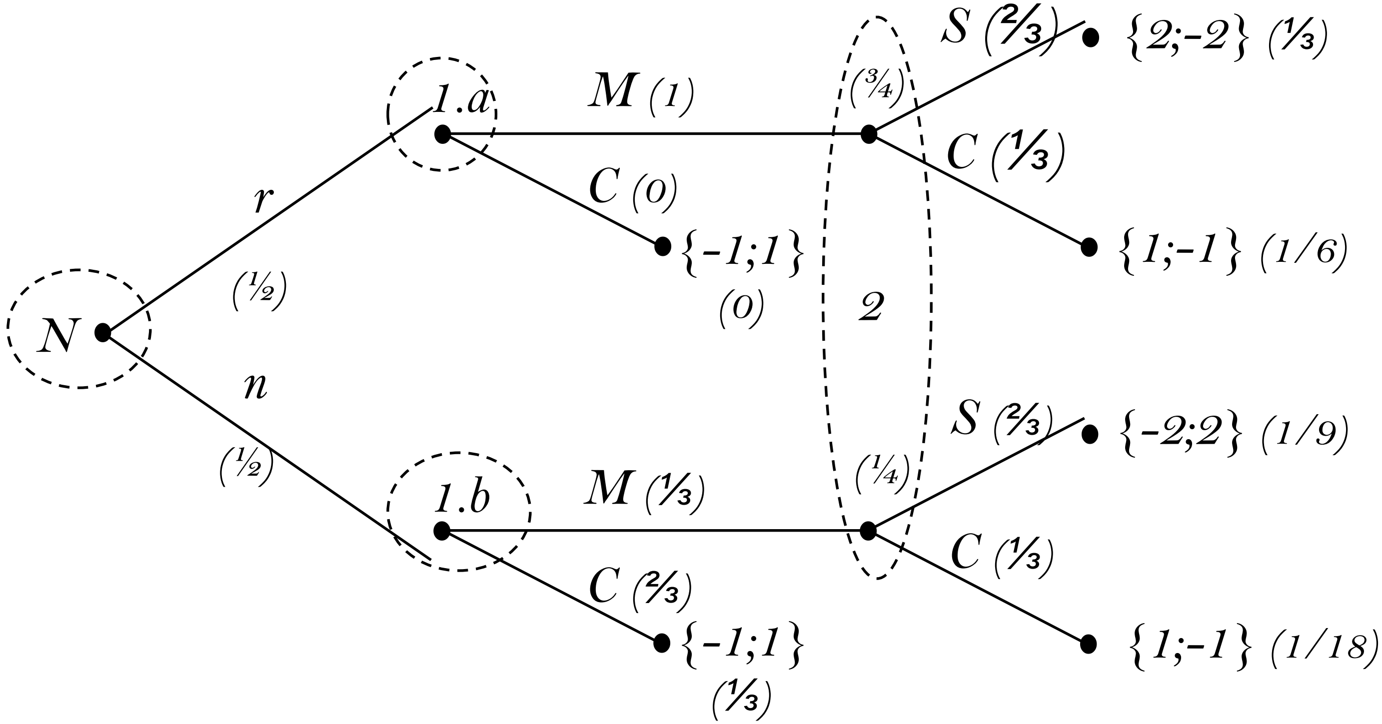
- Pour le joueur 1, les paiements sont calculés de la manière suivante:
$U_1(MM,S) = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.(-2) = 0$ et $U_1(MM,C) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 = 1$,
$U_1(MC,S) = \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2}.(-1) = \frac{1}{2}$ et $U_1(MC,C) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.(-1) = 0$,
$U_1(CM,S) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.(-2) = -3/2$ et $U_1(CM,C) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.1 = 0$,
$U_1(CC,S) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.(-1) = -1$ et $U_1(CC,C) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.(-1) = -1$.
- Pour le joueur 2 on a:

$U_2(S,MM) = \frac{1}{2}.(-2) + \frac{1}{2}.2 = 0$ et $U_2(C,MM) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.(-1) = -1$,
$U_2(S,MC) = \frac{1}{2}.(-2) + \frac{1}{2}.1 = -\frac{1}{2}$ et $U_2(C,MC) = \frac{1}{2}.(-1) + \frac{1}{2}.1 = 0$,
$U_2(S,CM) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.2 = 3/2$ et $U_2(C,CM) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.(-1) = 0$,
$U_2(S,CC) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 = 1$ et $U_2(C,CC) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 = 1$.

- On peut remarquer que CM et CC sont strictement dominées, par MM. Ce jeu admet un unique **EN** dans lequel les stratégies sont mixtes: $\boldsymbol{\alpha}_* = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$.

- Comme le jeu est à **somme nulle**, ces stratégies sont également les stratégies prudentes des joueurs et la valeur du jeu est $V = s_1 = v_1 = -s_2 = -v_2 = 1/3$.

$\alpha_* = \{\alpha_{1*} ; \alpha_{2*}\} = \{(1/3, 2/3, 0, 0); (2/3, 1/3)\} \Leftrightarrow \mu_* = \{\mu_{1*} ; \mu_{2*}\} = \{((1,0),(1/3,2/3)); (2/3,1/3)\}$



$U_1(\mu_{1*}, \mu_{2*}) = 0.(-1) + (1/3).2 + (1/6).1 + (1/9).(-2) + (1/18).1 + (1/3).(-1) = 1/3$

et

$U_2(\mu_{2*}, \mu_{1*}) = 0.(1) + (1/3).(-2) + (1/6).(-1) + (1/9).2 + (1/18).(-1) + (1/3).1 = -1/3$

- La croyance *a priori*, c.à.d. avant de savoir si le joueur 1 a misé, que la carte du joueur 1 soit rouge ou noire est de ½.

- La croyance *a posteriori*, c.à.d. sachant que le joueur 1 a misé, est déterminée par *la règle de Bayes*:

$$P(r/M)=[P(M/r).P(r)]/P(M)=[1.\tfrac{1}{2}]/[\tfrac{1}{2}.1+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}]=\tfrac{3}{4}$$

$$P(n/M)=[P(M/n).\ P(n)]/P(M)=[\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2}]/[\tfrac{1}{2}.1+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}]=\tfrac{1}{4}$$

- S'il est amené à jouer, le joueur 2 sait qu'il a une chance sur quatre d'être face à un *bluff*.

- Compte tenu de ses croyances *a posteriori*, le joueur 2 obtient $(-2).\tfrac{3}{4}+2.\tfrac{1}{4}=-1$ en jouant *S*, et $(-1).\tfrac{3}{4}+(-1).\tfrac{1}{4}=-1$ en jouant *C*. Il est donc tout à rationnel pour lui de jouer la stratégie mixte (⅔,⅓) après avoir observé que le joueur 1 a misé.

- La stratégie d'équilibre du joueur 2 satisfait donc la condition de **rationalité séquentielle**.