Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021-2022
Licence - OM2

Examen, 15 Février - 2h

Calculettes et documents interdits.

Exercice 1.
Dessiner les courbes de niveau des fonctions suivantes :

1. $\alpha(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 16$, pour la valeur 4 ;
2. $\beta(x,y) = y + 3x^2 + 1$, pour la valeur 5.

Exercice 2. Calculer la différentielle de :

1. $f(x,y) = ln(\frac{3x^2}{2y}) + e^{\sin(3x^2+2)}$;
2. $g(x,y) = \cos(3e^{2xy}) + ln(3x^2 + 2y^3)$.

Exercice 3. Est-ce que les formes suivantes sont fermées ?

1. $\sigma(x,y) = \cos(x^2 + y^3)dx + \sin(x^3 + y^2)dy;$
2. $\delta(x,y) = 2x\sin(x^2 + y^3)dx + 3y^2\sin(x^2 + y^3)$;
3. $\omega(x,y) = \frac{z}{x^2+z^2}dx - \frac{x}{x^2+z^2}dz;$

Exercice 4. Vérifier le théorème de Schwarz pour la fonction :

$$F(x,y) = \frac{2}{xy} - e^{x^5-2y} - 3,$$

en calculant des dérivées partielles.

Exercice 5. Déterminer trois fonctions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont la différentielle est égale aux formes différentielles suivantes :

1. $\lambda_1(x,y) = \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy$;
2. $\lambda_2(x,y) = -2x\sin(x^2)dx + 2y\sin(y^2)dy;$
3. $\lambda_3(x,y) = (2e^{x+y} + 4y)dx + (2e^{x+y} + 4x)dy;$

Les trois formes différentielles sont elles fermées ? Exactes ? Pourquoi ?

Exercice 6. Déterminer le domaine de définition, et calculer les points critiques (s'il y en a) des trois fonctions suivantes :

1. $h(x, y) = 4\cos(x) - 2\sin(y) - 4\,;$

2. $f(x, y) = x^3 + 6y^2\,;$

3. $g(x, y) = 7 + ln(x^4 + y^6)\,;$