HLMA8301: Math pour PEIP
Planche TD 1 : Réduction

Exercice 1 (Sommes plus ou moins directes) Donner un exemple de trois sous-espaces vestoriels E_1, E_2, E_3 d'un espace vectoriel E tels que :

1. Pour $i \neq j$, la somme $E_i + E_j$ est directe.
2. La somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.

Exercice 2 (en dimension infinie) Soit E un espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme. On dit que u est nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{n\text{-fois}} = 0$.

1. Montrer que la seule valeur propre possible pour un endomorphisme nilpotent est 0.
2. Dans quel(s) cas un endomorphisme nilpotent est-il diagonalisable ?
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes, et soit $\phi : E \to E$ l'application (linéaire) définie par $\phi(P) = P'$
   (a) Montrer que la seule valeur propre possible pour ϕ est 0.
   (b) Quels sont les vecteurs propres associés ?
   (c) ϕ est-t-elle nilpotente ?

Exercice 3 (Géométrie) On se place dans $E = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$

1. Soit s_θ la symétrie orthogonale d'axe d'angle θ avec l'axe des absisses. Donner la matrice de s_θ dans la base canonique, puis donner une base de E pour laquelle la matrice est diagonale.
2. Soit r_θ la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que r_θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Pour quelle(s) valeur(s) de θ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Diagonalisation) Pour chaque endomorphisme u suivant, donner les valeurs propres, les vecteurs propres, dire s'il est diagonalisable, et dans ce cas, donner une base de vecteurs propres et une matrice diagonale représentant u.

1. $u(x, y) = (4x - 3y, 2x - y)$.
2. $u(x, y) = (x - 2y, y)$.
3. $u(x, y, z) = (-11x - 6y + 18z, -11x - 3y + 15z, -13x - 6y + 20z)$.
4. $u(x, y, z) = (-5x - 3y + 9z, -7x - y + 9z, -7x - 3y + 11z)$.
5. $u(x, y, z) = (-2x - 3y + 13z, -7x - 3y + 11z, -4x - 3y + 14z)$.

Exercice 5 (Homothéties) Soit u un endomorphisme diagonalisable ne possédant qu'une seule valeur propre, montrer que u est une homothétie (c'est-à-dire de la forme $\lambda.id$).

Exercice 6 (Cayley-Hamilton en dimension 2) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, montrer que $P_u(x) = x^2 - Tr(u)x + det(u)$, puis que $P_u(u) = 0$.

Exercice 7 (Contre exemple) La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 (Suites récurrentes) On considère 3 suites x_n; y_n, z_n vérifiant :

$x_{n+1} = 3x_n - z_n$
$y_{n+1} = 2x_n + 4y_n + 2x_n$
$z_{n+1} = -x_n + 3z_n$
Déterminer x_n, y_n, z_n en fonction de x_0, y_0, z_0.

Exercice 9 (Suite de Fibonacci) On considère la suite u_n définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que le polynome $x^2 - x - 1$ admet 2 racines réelles δ_1 et δ_2.
2. Montrer que u_n est une combinaison lineaire de δ_1 et δ_2.
3. Déterminer explicitement u_n.

Exercice 10 (Suite récurrente d'ordre 3) On considére la suite u_n vérifiant $u_{n+3} = -6u_{n+2} - u_{n+1} + 4u_n$. Déterminer u_n en fonction de u_0, u_1, u_2.

Exercice 11 (Equation différentielle d'ordre 2) Résoudre l'équation différentielle $y''(t) = ay'(t) + by(t)$ où a et b sont deux réels.