



**Département
de Mécanique**
Faculté des Sciences

Loïc Daridon

Emilien Azema - Patrick Canadas

COURS S.E.F HAY711Y

Département d'enseignement Mécanique de l'UFR de Sciences de l'UMII

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil

VERSION 1.0



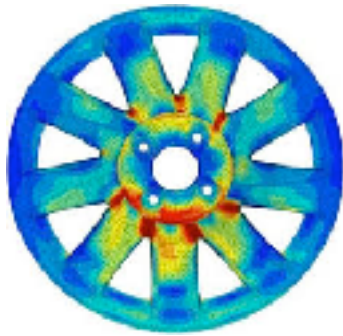
- Objectifs
 - Présenter la méthode éléments finis (cas Linéaire)
 - Comprendre et Utiliser un code E.F.
- Plan
 - Rapel MMC
 - Méthode énergétique - PPV
 - Méthode de discrétisation
 - Intégration numérique
 - Application à la MEF



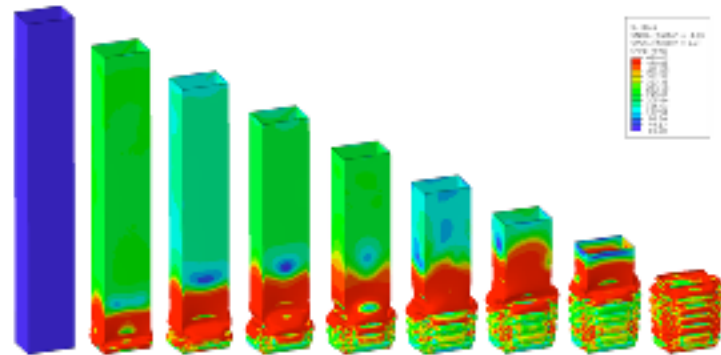
- MCC
 - A définir ?
- Organisation
 - 12 H CM L. D
 - 15 H TD E.A
 - 15 H TP P.C & L.D



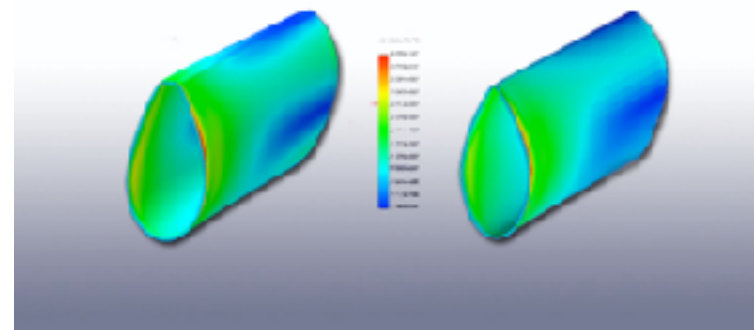
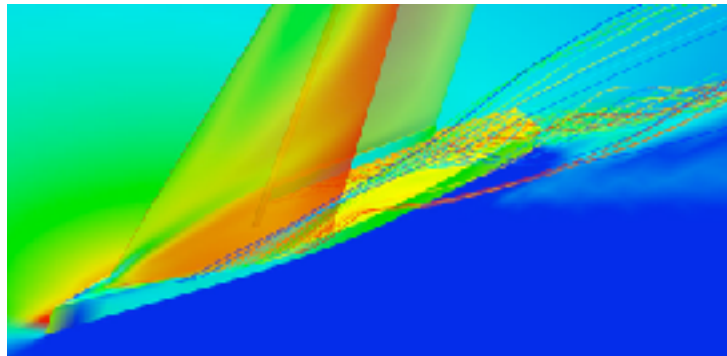
Pourquoi faire des EF



ZéBuLoN



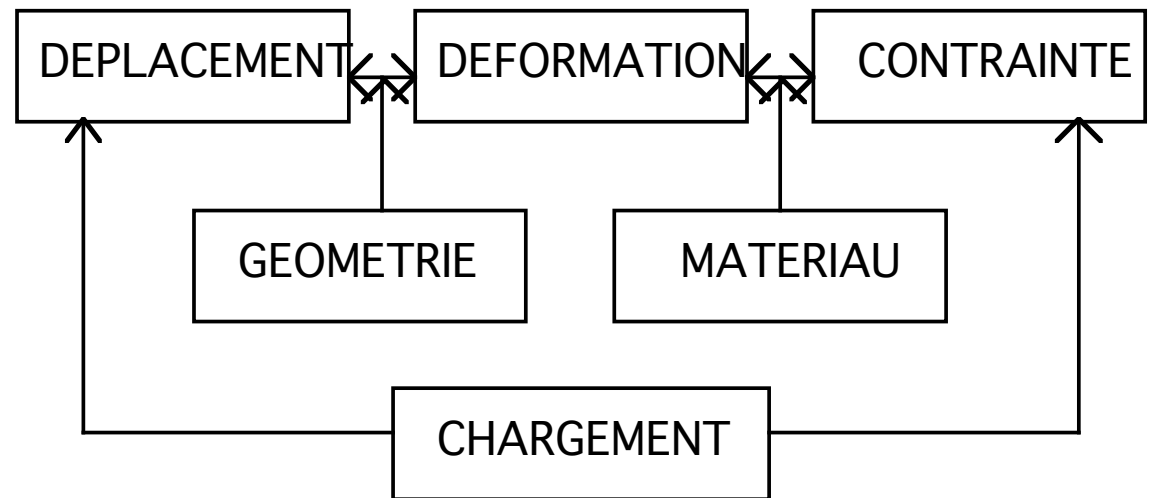
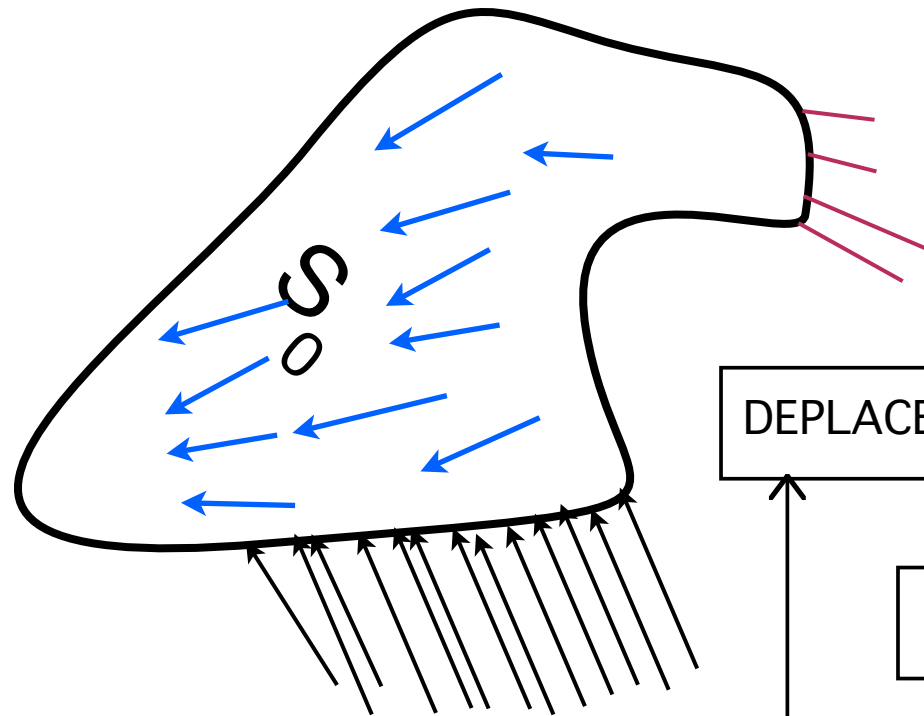
EC2 Modélisation

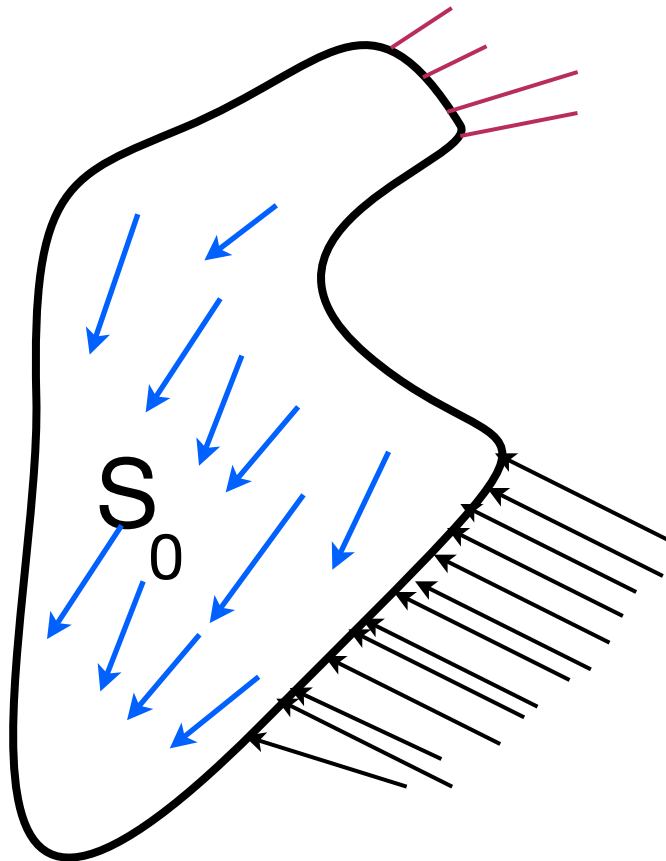


PRO-FIL Composites



Problème de Mécanique





1. Équations d'équilibre

1.1. MMC

1.2. RDM

2. Conditions aux limites

1. En efforts

2. En déplacement

Le comportement du matériau est élastique linéaire

(loi de Hooke).

3. Loi de comportement

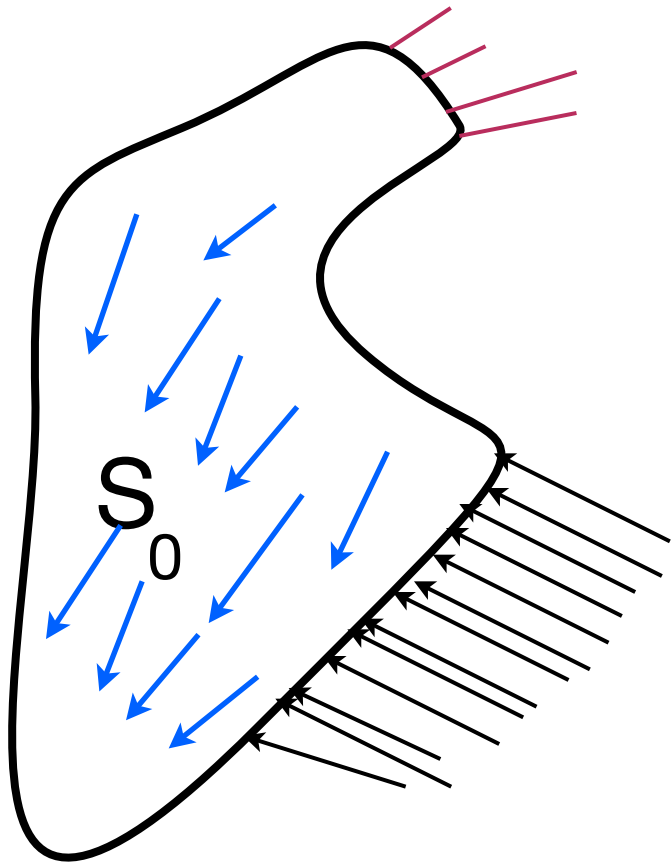
Champ de déplacement

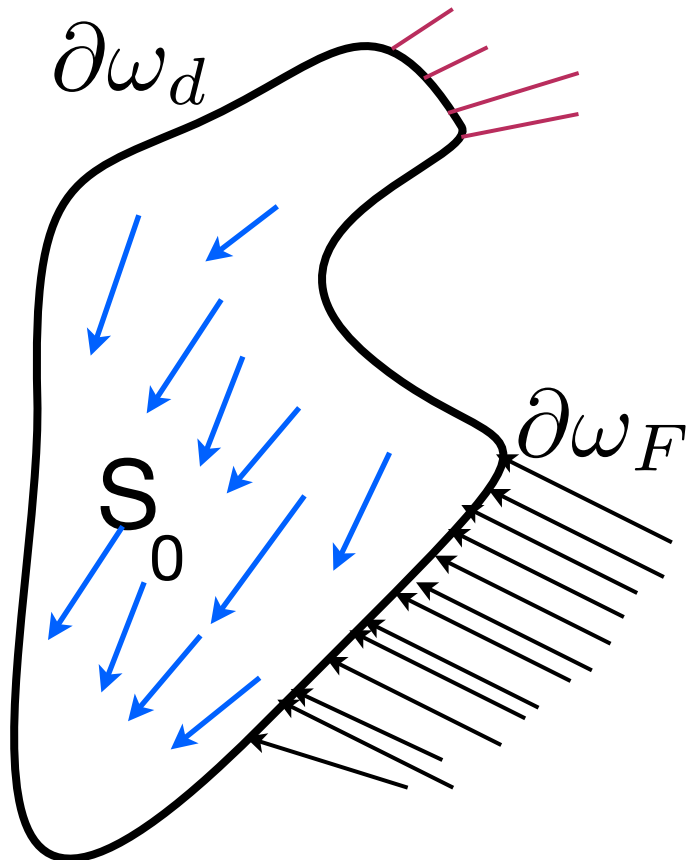
$$U(x, y, z) = \begin{cases} u(x, y, z) = U_1(x_1, x_2, x_3) \\ v(x, y, z) = U_2(x_1, x_2, x_3) \\ w(x, y, z) = U_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Convention Indice

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$$





1. Équations d'équilibre

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

2. Conditions aux limites

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} \quad \text{sur} \quad \partial\omega_F$$

$$\vec{U} = \vec{U}_d \quad \text{sur} \quad \partial\omega_d$$

3. Loi de comportement

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{noté} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire
(loi de Hooke).

Équations d'équilibre

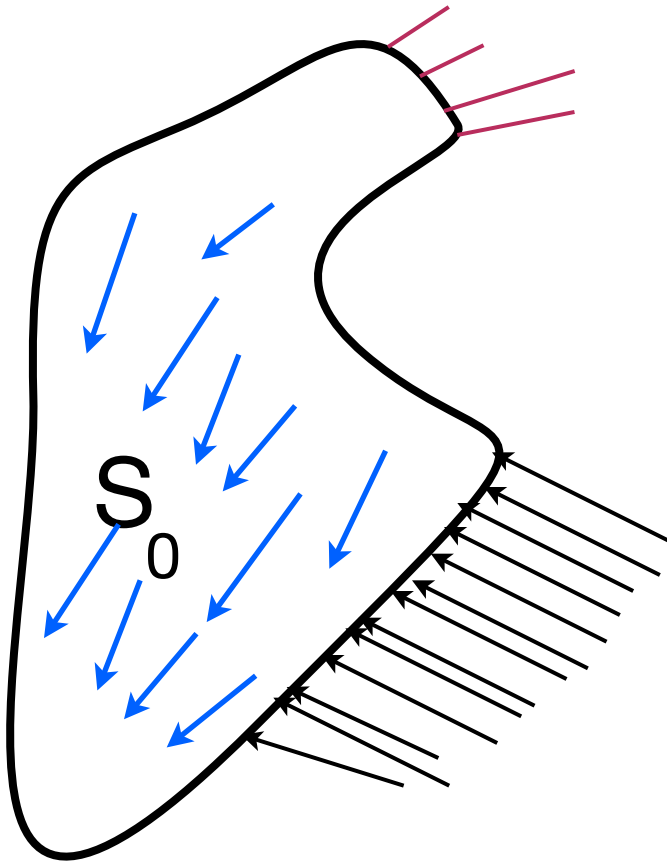
$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

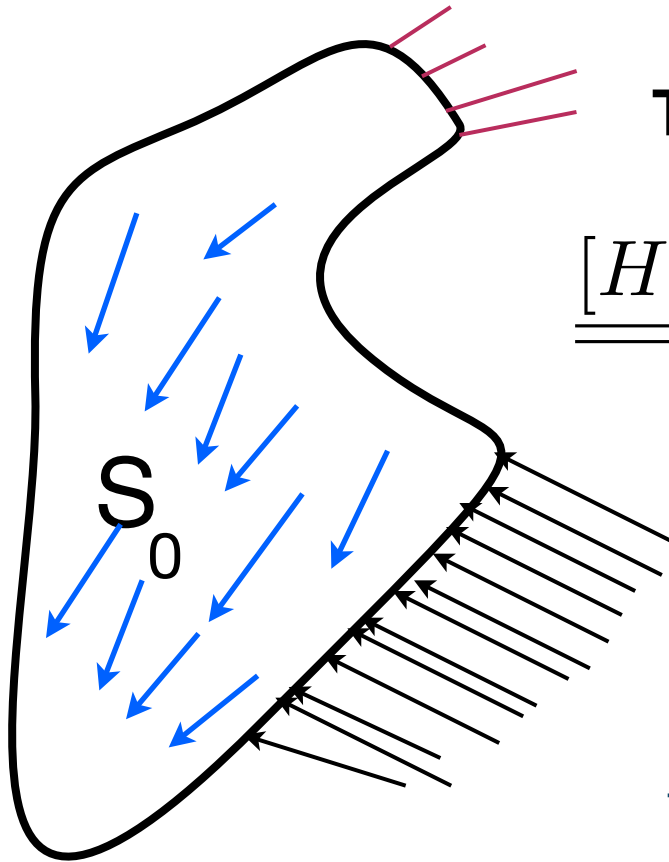
$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Équations d'équilibre en coordonnée cartésienne

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i$$

$$[\sigma(x)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}$$





Tenseur de Green Lagrange

$$\underline{\underline{[H]}} = \underline{\underline{[\epsilon]}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{[\epsilon]}} - \underline{\underline{[\Omega]}} \right) \left(\underline{\underline{[\epsilon]}} + \underline{\underline{[\Omega]}} \right)$$

$$\underline{\underline{[\Omega]}} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(U) - \text{grad}(U)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla U - \nabla U^T \right)$$

$$\underline{\underline{[\epsilon]}} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(U) + \text{grad}(U)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla U + \nabla U^T \right)$$

Hypothèse de petite perturbation

faible rotation, faible déplacement, petite déformation

$$\underline{\underline{[H]}} = \underline{\underline{[\epsilon]}}$$



Élasticité linéaire



Un matériau est dit **orthotrope** s'il a deux plans de symétrie de comportement mécanique, il y a donc trois axes d'orthotropies.

Il y a **9** constantes mécaniques pour définir la loi de comportement

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$



Un matériau est dit **Isotrope Transverse** s'il a un plan de symétrie de comportement mécanique, il y a donc un axe d'orthotropie.

Il y a **6** constantes mécaniques pour définir la loi de comportement

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{yz})}{E_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

Pour un matériau **Isotrope** il y a **2** constantes mécaniques pour définir la loi de comportement

Loi de HOOKE

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Coefficient de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Pour un matériau Isotrope il y a **2** constantes mécanique pour définir la loi de comportement

Loi de HOOK

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Module de compressibilité

$$K = \frac{E}{(1 - 2\nu)}$$

Module de Young

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

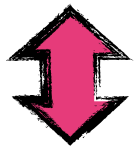
Module de cisaillement

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

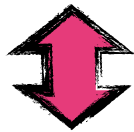
Coefficient de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Problème de mécanique



Formulation de type PPV



Formulation de type Energie Potentielle

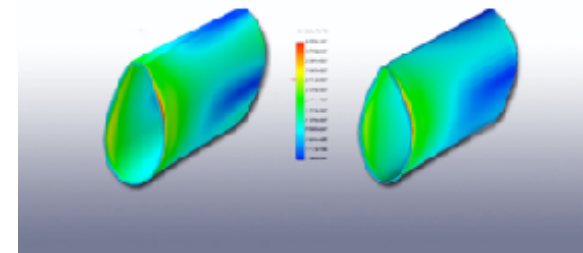
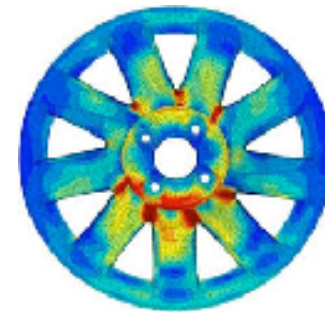
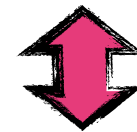


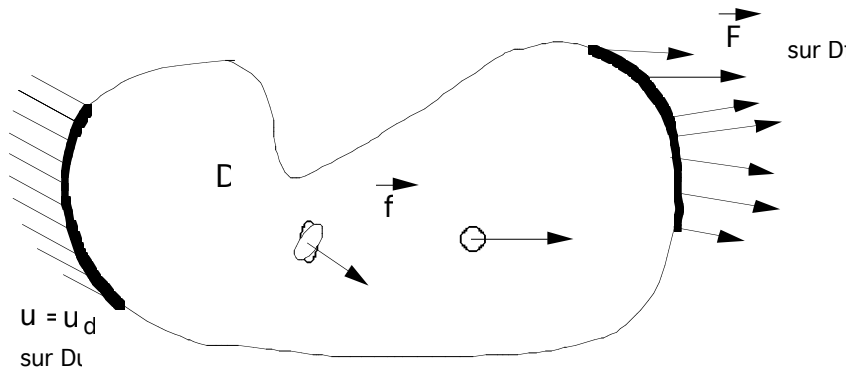
Problème de minimisation d'énergie



$$[\mathbf{K}][Q] = [\mathbf{F}]$$

$$[Q] = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{F}]$$





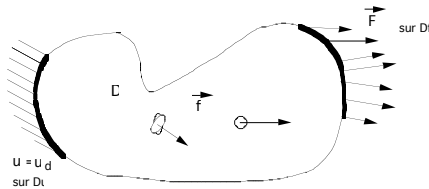
∂D_F

C'est le bord où l'on impose des efforts connus

∂D_u C'est le bord où l'on impose des déplacements nuls ou pas !

$$u^* \in C.A. \quad \Leftrightarrow \quad u^*(x) = U_d \quad \forall x \in \partial D_u$$

$$u^* \in C.A.\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u^*(x) = 0 \quad \forall x \in \partial D_u$$



$$\forall u^*(x) \in C.A. \{0\}$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{ext}(u^*(x)) = P_{acc}(u^*(x))$$

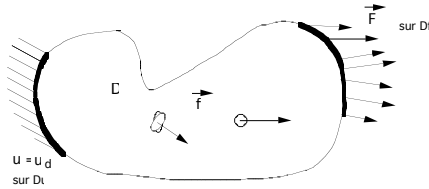
$$P_{int}(u^*(x)) = - \int_D tr(\sigma(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega$$

$$P_{ext}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{\partial D} F(x) \cdot u^*(x) dS$$

$$P_{acc}(u^*(x)) = \int_D \left(\rho \frac{d^2(u^*(x))}{d^2(t)} \right) u^*(x) d\Omega$$



Problème de mécanique - PPV



$$P_{int}(u^*(x)) = - \int_D tr(\sigma(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega$$

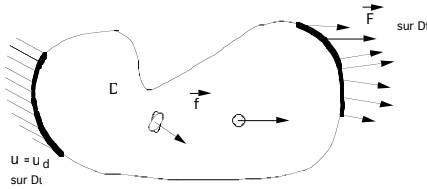
$$P_{int}(u^*(x)) = - \int_D tr(\sigma(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega$$

$$P_{int}(u^*(x)) = - \int_D \sigma_{ij}(x) \cdot \varepsilon_{ij}^*(x) d\Omega$$

$$P_{int}(u^*(x)) = - \int_D L_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x) \cdot \varepsilon_{ij}^*(x) d\Omega$$

$$P_{int}(u^*(x)) = -\mathbf{K}(U, U^*)$$

$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}$ note $\omega = \mathbb{M} \cdot \sigma$
 ou $\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ note $\sigma = \mathbb{L} \cdot \varepsilon$



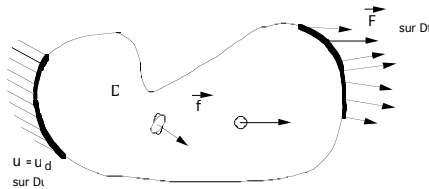
$$\forall u^*(x) \in C.A. \{0\}$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{ext}(u^*(x)) = P_{acc}(u^*(x))$$

$$P_{ext}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{\partial D} F(x) \cdot u^*(x) dS = P_{don}(u^*(x))$$

$$P_{don}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{\partial D_F} F(x) \cdot u^*(x) dS$$

$$P_{don}(u^*(x)) = -\mathbf{L}(U^*)$$



$$\forall u^*(x) \in C.A. \{0\}$$

et

$$\forall u(x) \in C.A.$$

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{ext}(u^*(x)) = 0$$

Formulation 1

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{don}(u^*(x)) = 0 \quad \forall U^* \in C.A. \{0\}$$

et

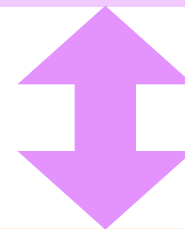
$$-\mathbf{K}(U, U^*) + \mathbf{L}(U^*) = 0$$

$$\forall U \in C.A.$$

PPV \Leftrightarrow Pb (1)

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{don}(u^*(x)) = 0 \quad \forall U^* \in C.A. \{0\}$$

$$- \mathbf{K}(U, U^*) + \mathbf{L}(U^*) = 0 \quad \text{et} \quad \forall U \in C.A.$$



Cf HAY701Y

1. Équations d'équilibre

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

3. Loi de comportement

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{noté} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

2. Conditions aux limites

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} \quad \text{sur} \quad \partial\omega_F$$

$$\vec{U} = \vec{U}_d \quad \text{sur} \quad \partial\omega_d$$



Energie potentielle - PPV



$$PPV \Leftrightarrow FV(\text{Ener Pot})$$

$$\partial (\Pi_d(u)) = \mathbf{K}(U, \partial U) - \mathbf{L}(\partial U)$$

$$= - (P_{int}(\partial U) + P_{don}(\partial U))$$

$$= 0$$

$$\begin{cases} \forall U \in C.A. \\ \forall \partial U \in C.A. \setminus \{0\} \end{cases}$$

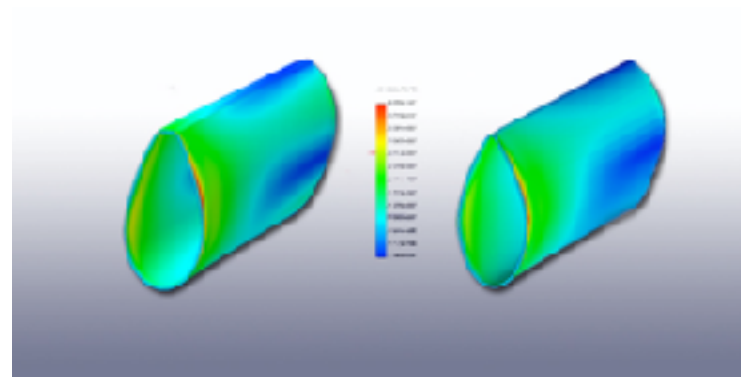
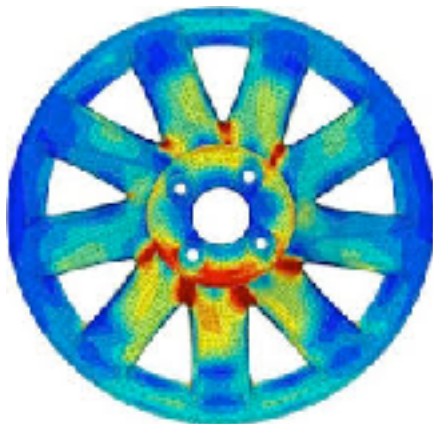
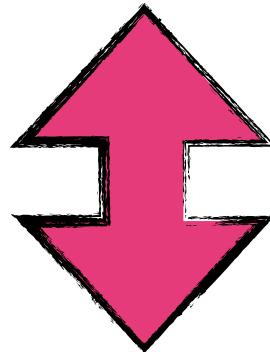
Comme $\partial U \in C.A \setminus \{0\}$

Cette formulation est très adaptée aux méthodes de discrétisation de type Galerkin ou Ritz.

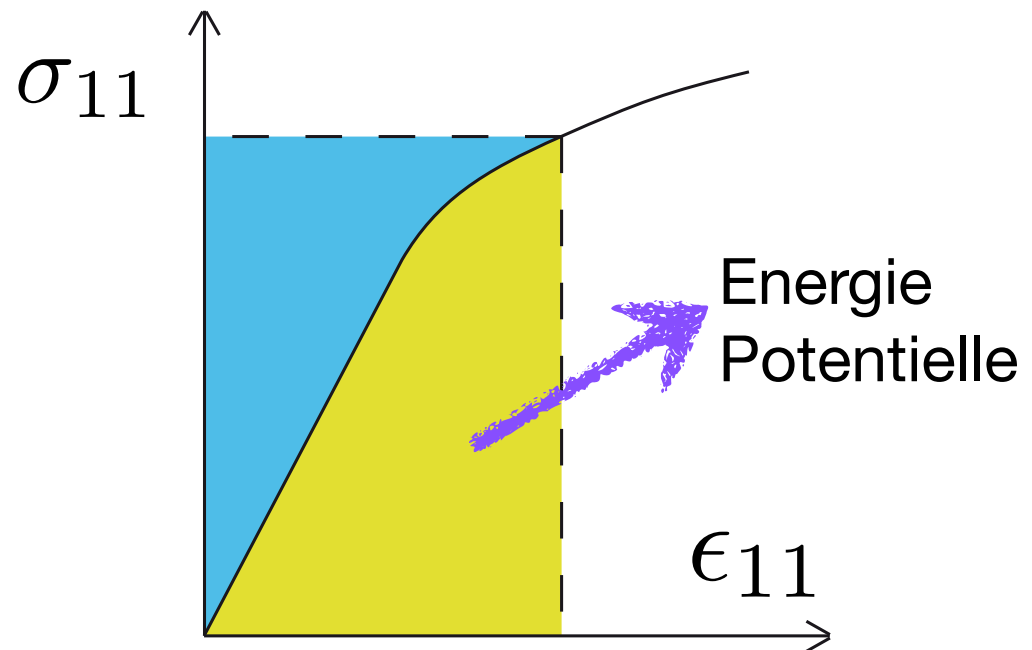
Elle est généralement le support pour la méthode par élément finis.

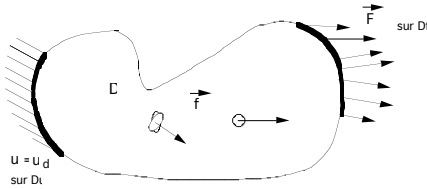
$$\begin{aligned} \partial (\Pi_d(u)) &= \mathbf{K}(U, \partial U) - \mathbf{L}(\partial U) \\ &= - (P_{int}(\partial U) + P_{don}(\partial U)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \forall U \in C.A. \\ \forall \partial U \in C.A. \{0\} \end{cases}$$



Dans le cas d'un chargement uni-axiale





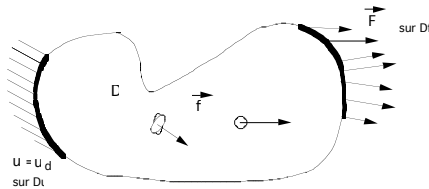
L'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation $\omega(\varepsilon)$

est une fonction telle que la loi de comportement s'écrive

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

la densité d'énergie de déformation est :

$$\rho \omega(\varepsilon) = \frac{1}{2} L_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$



La densité d'énergie de déformation :

$$\rho\omega(\varepsilon) = \frac{1}{2}L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

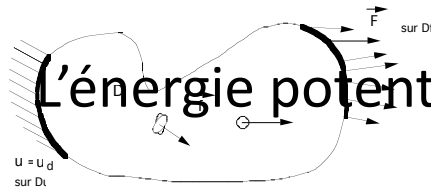
$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{1}{2}L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \right) &= \frac{1}{2} \left(L_{ijkl}\partial\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl} \right) \\ &= L_{ijkl}\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl} \\ &= \rho\partial\omega \end{aligned}$$



Energie Potentielle



Cf HAY701Y



L'énergie potentielle est définie par :

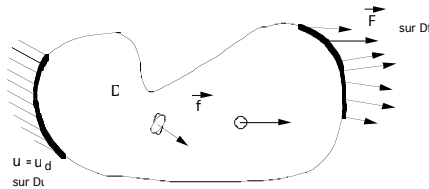
$$\Pi_d(u) = \int_D \frac{1}{2} L_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\omega - \left(\int_D f(x) \cdot u(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u(x) dS \right)$$

$$u(x) \in C.A \{u_d\}$$

L'énergie potentielle est définie comme la différence entre l'énergie de déformation du système et le travail des efforts imposés et cela pour un champ cinématiquement admissible

Formulation 2

Cf HAY701Y



$$u(x) \in C.A \{u_d\}$$

$$\delta (\Pi_d(u)) = 0$$

$$\begin{cases} u(x) \in C.A \{u_d\} \\ \delta (\Pi_d(u)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P.P.V \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) \in C.A \{u_d\} \\ u^*(x) \in C.A \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) \in C.A \{u_d\} \\ \delta (\Pi_d(u)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Pb(1)$$



Cf HAY701Y

PPV \Leftrightarrow Fv 2

$$\begin{aligned}\Pi_d(u) &= \frac{1}{2} \int_D L_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\omega - \left(\int_D f(x) \cdot u(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u(x) dS \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\omega - \left(\int_D f(x) \cdot u(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u(x) dS \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{K}(U, U) - \mathbf{L}(U)\end{aligned}$$



PPV \Leftrightarrow Fv 2

$$\begin{aligned}\partial (\Pi_d(u)) &= \partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{K}(U, U) - \mathbf{L}(U) \right) && \forall U \in C.A. \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{K}(\partial U, U) + \mathbf{K}(U, \partial U)) - \mathbf{L}(\partial U) && \left\{ \begin{array}{l} \forall U \in C.A. \\ \forall \partial U \in C.A. \{0\} \end{array} \right.\end{aligned}$$

$\mathbf{K}(U, U)$ Forme quadratique symétrique définie positive

$\mathbf{L}(U)$ Forme Linéaire



Energie potentielle - Discrétisation



$\mathbf{K}(U, U)$ Forme quadratique symétrique définie positive

$\mathbf{L}(U)$ Forme Linéaire

Cf HAY701Y

$u(x) \in C.A \{u_d\}$ Une fonction continue inconnue à trouver

Discrétisation : Déterminer un nombre fini d'inconnue



METHODE DE GALLERKINE

PPV

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \in C.A.$$
$$u^*(x) = P_i(x) \in C.A. \{0\}$$

METHODE DE RITZ

Energie potentielle

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \in C.A.$$



La méthode de Galerkin est adaptée à la formulation variationnelle découlant du P.P.V

Principe : On se donne n fonctions de base $\{P_i(x)\}$ appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution du Pb(I) comme une combinaison linéaire de ces fonctions, dans le cas où il existe des déplacements imposés on rajoute une fonction les réalisant.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \quad \in C.A.$$

$$u^*(x) = P_i(x) \quad \in C.A.\{0\}$$



Les n inconnues du Pb sont : $Q_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$

PPV :

$$P_{int}(u^*(x)) + P_{don}(u^*(x)) = 0$$
$$-\mathbf{K}(U, U^*) + \mathbf{L}(U^*) = 0$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \quad \in C.A.$$

$$u^*(x) = P_i(x) \quad \in C.A.\{0\}$$



Méthode de Galerkin



$$\mathbf{K}(U, U^*) = \mathbf{L}(U^*)$$

$$U = u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \in C.A.$$

$$U^* = u^*(x) = P_i(x) \in C.A. \{0\} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\mathbf{K}\left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x), U^*\right) = \mathbf{L}(U^*)$$

Une équation , n Inconnues :

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{K}(P_i(x), U^*) = \mathbf{L}(U^*) - \mathbf{K}(u_d(x), U^*)$$



Méthode de Galerkin



$$\mathbf{K}(U, U^*) = \mathbf{L}(U^*)$$

$$U = u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \in C.A.$$

$$\mathbf{K}\left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x), U^*\right) = \mathbf{L}(U^*) \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Une équation , n Inconnues :

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{K}(P_i(x), U^*) = \mathbf{L}(U^*) - \mathbf{K}(u_d(x), U^*)$$



n équations , n Inconnues :

$$U^* = u^*(x) = P_i(x) \in C.A. \{0\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{K}(P_i(x), U^*) = \mathbf{L}(U^*) - \mathbf{K}(u_d(x), U^*)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{K}(P_i(x), P_j(x)) = \mathbf{L}(P_j(x)) - \mathbf{K}(u_d(x), P_j(x))$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}$$



n équations , n Inconnues :

$$\sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{K}(P_i(x), P_j(x)) = \mathbf{L}(P_j(x)) - \mathbf{K}(u_d(x), P_j(x))$$

$$[\mathbf{K}] [Q] = [\mathbf{F}]$$

$[\mathbf{K}]$ Matrice de **RIGIDITÉ**

$[Q]$ Inconnues

$[\mathbf{F}]$ Vecteur **Force**

$$[\mathbf{K}][Q] = [\mathbf{F}]$$

$$[\mathbf{K}] = [K_{ij}] = [\mathbf{K}(P_i(x), P_j(x))]$$

$$\mathbf{K}(P_m(x), P_n(x)) = - \int_D L_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m(x) \cdot \varepsilon_{ij}^n(x) d\Omega$$

$$\varepsilon_{kl}^m(x) = \frac{1}{2} (\nabla U_m + \nabla^T U_m)$$

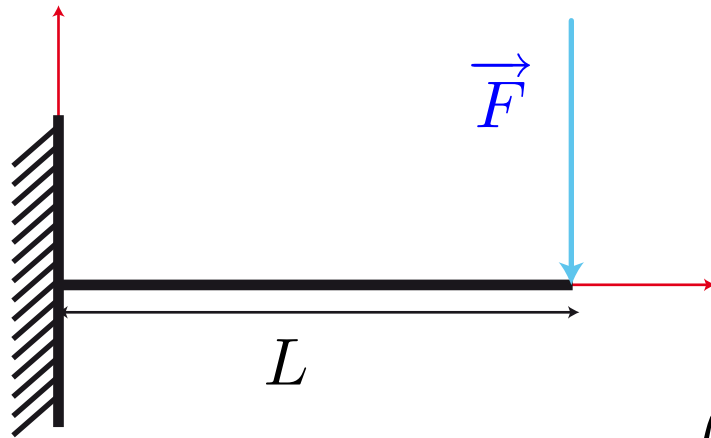
$[\mathbf{K}]$ est symétrique

$$[\mathbf{K}][Q] = [\mathbf{F}]$$

$$[\mathbf{F}] = [F_i]$$

$$\begin{aligned} F_i &= \mathbf{L}(P_i(x)) - [\mathbf{K}(u_d(x), P_i(x))] \\ &= \int_D f(x) \cdot P_i(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot P_i(x) dS - \int_D L_{mnkl} \varepsilon_{kl}^d(x) \cdot \varepsilon_{mn}^i(x) d\Omega \end{aligned}$$

Exemple 1-D



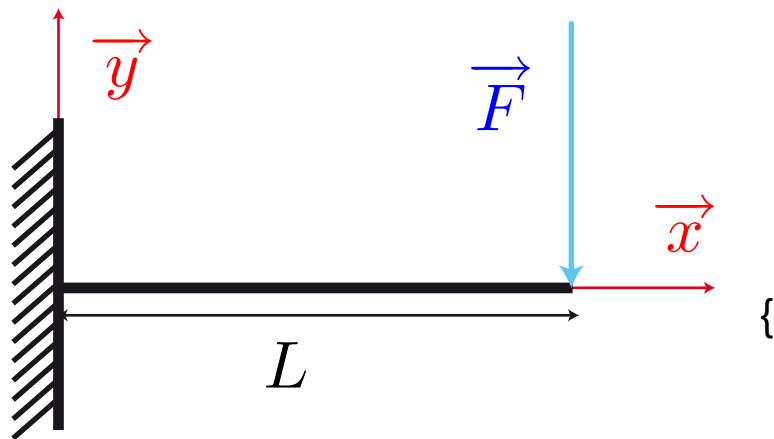
$$\text{hpp} \quad \underline{\underline{[\varepsilon]}} = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T)$$

Euler-Bernouilli

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x) - (y - y_G)v'(x) \\ v(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(U, U^*) &= \int_D L_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}^* d\omega \\ &= \int_0^L ES u'(x) u'^*(x) + EI v''(x) v''^*(x) dx \end{aligned}$$

Exemple 1-D Problème de flexion en hpp Plan $u(x) = 0$



$$\mathbf{K}(U, U^*) = \int_0^L EI v''(x) v''^*(x) dx$$

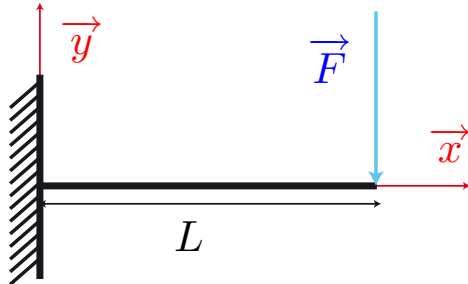
$$\mathbf{L}(U^*) = -F v^*(L)$$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad \{v(x), v^*(x)\} \in C.A \{0\}$$

2 fonctions de base

$$\begin{cases} P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \\ P_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Exemple 1-D



$$v^*(x) \in \{P_1(x), P_2(x)\}$$

2 fonctions de base

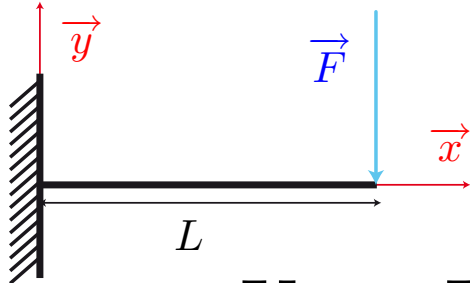
$$v(x) = Q_1 P_1(x) + Q_2 P_2(x)$$

=> 2 inconnues

$$[\mathbf{K}] = [K_{ij}] = [\mathbf{K}(P_i(x), P_j(x))] \quad \begin{cases} P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \\ P_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Exemple 1-D

$$P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \quad P_2(x) = x^2$$



$$[\mathbf{K}] = [K_{ij}] = [\mathbf{K}(P_i(x), P_j(x))]$$

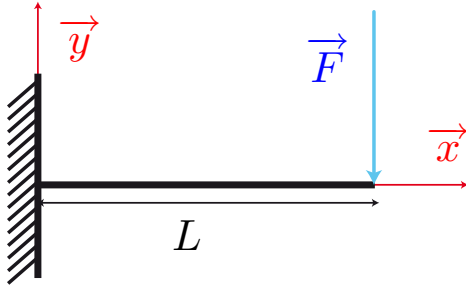
$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}(P_1(x), P_1(x)) = \int_0^L EI P_1''(x) P_1''(x) dx$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}(P_1(x), P_2(x)) = \int_0^L EI P_1''(x) P_2''(x) dx$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}(P_2(x), P_2(x)) = \int_0^L EI P_2''(x) P_2''(x) dx$$

Exemple 1-D

$$P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \quad P_2(x) = x^2$$



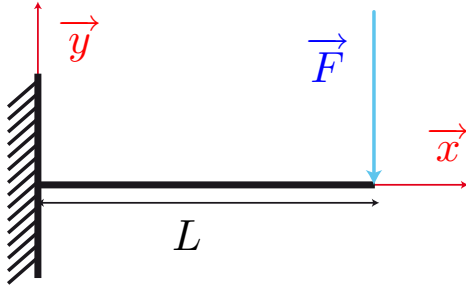
$$[\mathbf{F}] = [F_i]$$

$$F_1 = -F P_1(L) = 2F$$

$$F_2 = -F P_2(L) = -FL^2$$

Exemple 1-D

$$P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \quad P_2(x) = x^2$$



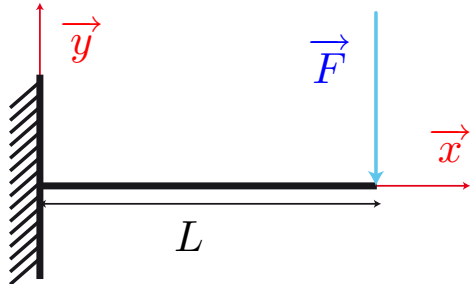
$$F_1 = -F P_1(L) = 2F$$

$$F_2 = -F P_2(L) = -FL^2$$

$$\begin{bmatrix} EI \frac{1}{2} \frac{\Pi^4}{L^3} & 0 \\ 0 & 4LEI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F \\ -FL^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \frac{FL^3}{EI\Pi^4} \\ \frac{-FL}{4EI} \end{bmatrix}$$

Exemple 1-D



$$P_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \quad P_2(x) = x^2$$

$$v(x) = Q_1\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1\right) + Q_2 x^2$$

$$v(x) = 4 \frac{FL^3}{\pi^4 EI} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1\right) - \frac{FL}{4EI} x^2$$

$$\begin{aligned} v(L) &= -\frac{FL^3}{EI} \left(\frac{8}{\pi^4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{FL^3}{EI} (0.3321278580) \end{aligned}$$

Valeur Théorique

$$v(L) = -\frac{FL^3}{3EI}$$



La méthode de Ritz est adaptée à la formulation variationnelle découlant de l'écriture de l'**énergie potentielle**

Principe : On se donne n fonctions de base $\{P_i(x)\}$ appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution du Pb(I) comme une combinaison linéaire de ces fonctions, dans le cas où il existe des déplacements imposés on rajoute une fonction les réalisant.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \in C.A.$$

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \in C.A.\{0\}$$



L'énergie potentielle

Cf HAY701Y

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{K} (u(x), u(x)) - \mathbf{L} (u(x))$$

$$\delta \Pi_p = 0$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} (u(x), u(x)) - \mathbf{L} (u(x)) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{K} (\delta u(x), u(x)) + \mathbf{K} (u(x), \delta u(x))) - \mathbf{L} (\delta u(x)) = 0$$

$$\mathbf{K} (u(x), \delta u(x)) - \mathbf{L} (\delta u(x)) = 0$$

comme $\mathbf{K}(u,u)$ est une forme bilinéaire symétrique

Cf HAY701Y

$$\begin{aligned} \delta\Pi_p &= \mathbf{K} \left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \right) - \mathbf{L} \left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \right) = 0 \quad \forall \delta [Q] \\ &+ \mathbf{K} \left(\sum_{i=1}^n Q_i P_i(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \right) + \\ &\mathbf{K} \left(u_d(x), \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \right) - \mathbf{L} \left(\sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(x) \right) = 0 \quad \forall \delta [Q] \end{aligned}$$

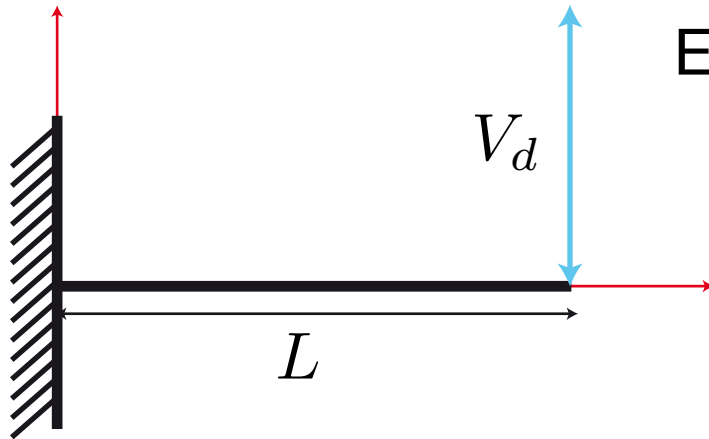
que l'on peut réécrire sous forme matricielle en utilisant les notation précédentes

$$\begin{aligned} \delta\Pi_p &= \delta [Q] [\mathbf{K}] [Q] - \delta [Q] [\mathbf{F}] = 0 \quad \forall \delta [Q] \\ &\delta [Q] \left([\mathbf{K}] [Q] - [\mathbf{F}] \right) = 0 \quad \forall \delta [Q] \end{aligned}$$

et donc $[\mathbf{K}] [Q] = [\mathbf{F}]$ où $\begin{cases} \mathbf{K}_{ij} &= \mathbf{K}(P_i(x), P_j(x)) \\ \mathbf{F}_i &= \mathbf{L}(P_i(x)) - \mathbf{K}(u_d(x), P_i(x)) \end{cases}$

Exemple 1-D

$$\text{hpp} \quad \underline{[\varepsilon]} = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T)$$



Euler-Bernouilli

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x) - (y - y_G)v'(x) \\ v(x) \end{cases}$$

1 fonction de base

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$v(L) = V_d$$

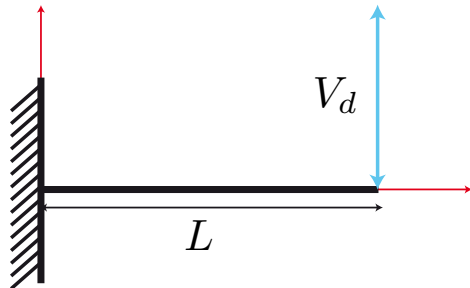
OU

$$v_1(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right)$$

$$v_1(x) = \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - 1 \right)$$

$$v(x) = Q_1 v_1(x) + \frac{x^2}{L^2} V_d$$

Exemple 1-D



$$\Pi_d = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''(x) v''(x) dx$$

$$v(x) = Q_1 v_1(x) + \frac{x^2}{L^2} V_d$$

$$\delta v(x) = \delta Q_1 v_1(x)$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{K} (u(x), u(x))$$

$$\delta \Pi_p = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial Q_i} = 0$$

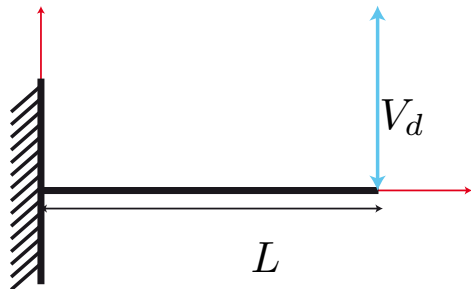


Méthode de Ritz



Exemple 1-D

$$\Pi_d = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''(x) v''(x) dx$$



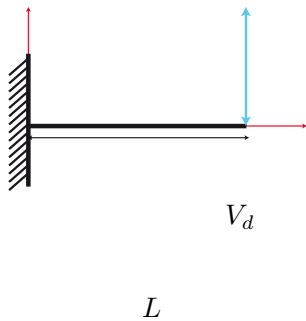
$$\begin{aligned} \delta \Pi_p &= 0 \\ \delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} (v(x), v(x)) \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$v(x) = Q_1 \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - 1 \right) + \frac{x^2}{L^2} V_d$$

$$v''(x) = -Q_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 2 \frac{V_d}{L^2}$$

$$\delta v''(x) = -\delta Q_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Exemple 1-D



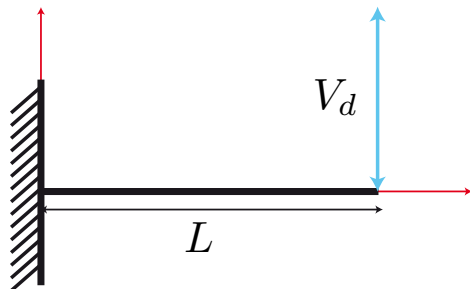
$$\begin{aligned} \delta \Pi_p &= 0 \\ \delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} (v(x), v(x)) \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} (v(x), \delta v(x)) = \int_0^L EI v''(x) \delta v''(x) dx = 0$$

$$\int_0^L EI \left(-Q_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) + 2 \frac{V_d}{L^2} \right) \left(-\delta Q_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right) dx = 0 \quad \forall \delta Q_1$$

$$\delta Q_1 \left(\int_0^L EI \left(-Q_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) + 2 \frac{V_d}{L^2} \right) \left(- \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right) dx \right) = 0 \quad \forall \delta Q_1$$

Exemple 1-D



$$\delta \Pi_p = 0$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{K} (v(x), v(x)) \right) = 0$$

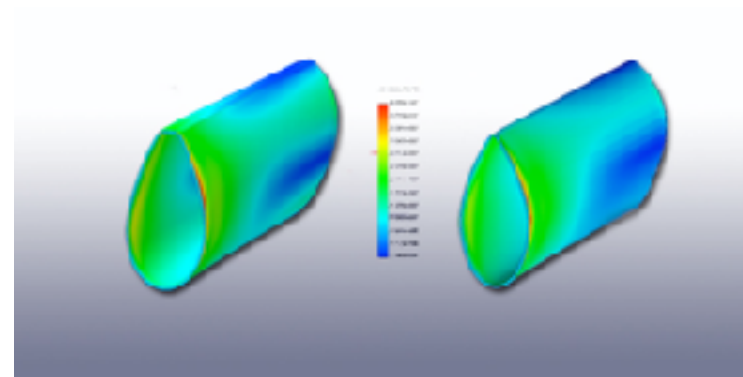
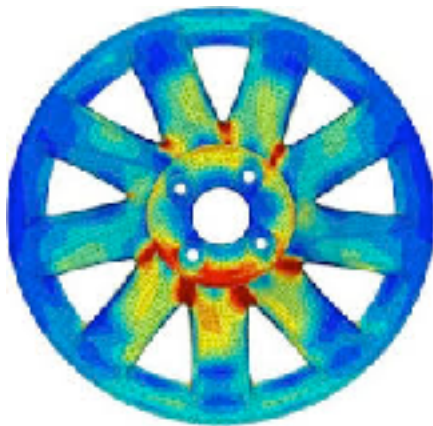
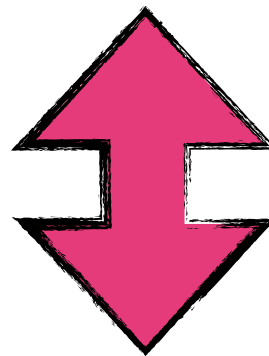
$$v(x) = Q_1 v_1(x) + \frac{x^2}{L^2} V_d$$

$$Q_1 = \frac{\int_0^L 2 \frac{V_d}{L^2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L} \right) dx}{\int_0^L EI \left(\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right)^2 dx}$$

$$v(x) = Q_1 v_1(x) + \frac{x^3}{6 L^3} V_d$$

$$Q_1 = \frac{\int_0^L x \frac{V_d}{L^3} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L} \right) dx}{\int_0^L EI \left(\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right)^2 dx}$$

$$[\mathbf{K}][Q] = [\mathbf{F}]$$





Il est clair que pour résoudre le système

$$[\mathbf{K}][Q] = [\mathbf{F}]$$

, il y a des intégrations à faire.

Intégration Numérique

Méthode de Newton-Cotes

Méthode de Gauss



Méthode de Gauss



Méthode de GAUSS intègre exactement un polynôme d'ordre $2n-1$ avec n points.

$$I = \int_{-1}^1 (ax + b) dx = 2b = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ x_1 w_1 + x_2 w_2 = 0 \Rightarrow \text{deux types de solutions} \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} w_1 = 2 \\ x_1 = -x_2 = 0 \end{cases}$$

Méthode de GAUSS intègre exactement un polynôme d'ordre $2n-1$ avec n points.

$$I = \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \frac{2}{3}b + 2d = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ (w_1 - w_2)x_1 = 0 \\ x_1^2(w_1 + w_2) = \frac{2}{3} \\ (w_1 - w_2)x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Extrait Doc ANSYS

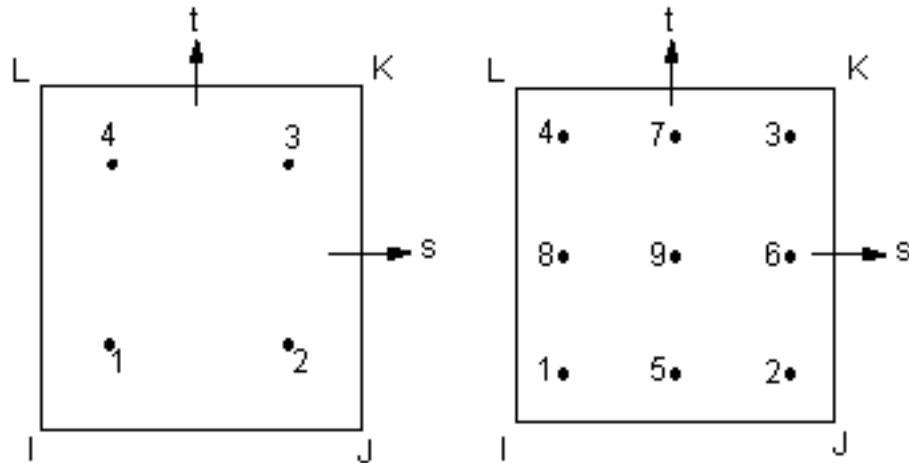


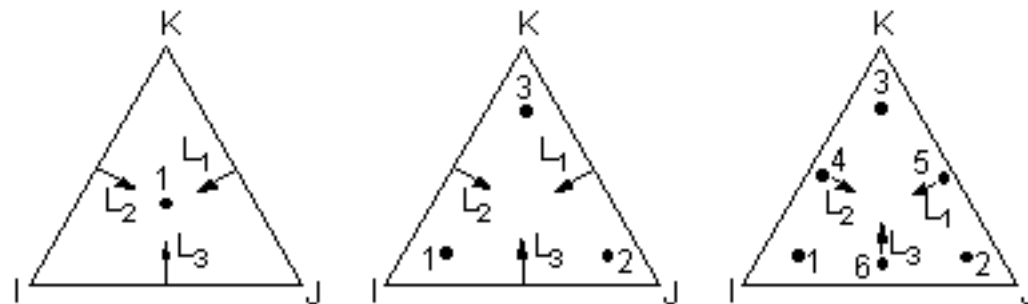
Figure 13.1 Integration Point Locations for Quadrilaterals

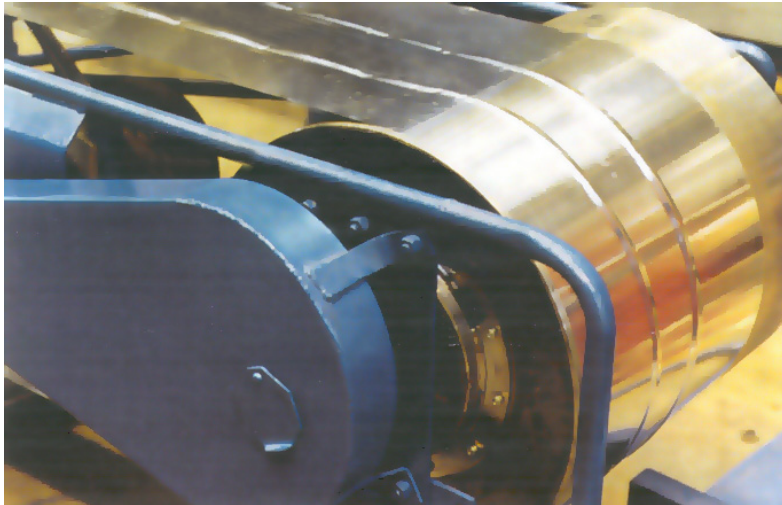
One element models with midside nodes (e.g., PLANE82) using a 2 x 2 mesh of integration points have been seen to generate spurious zero energy (hourglassing) modes.



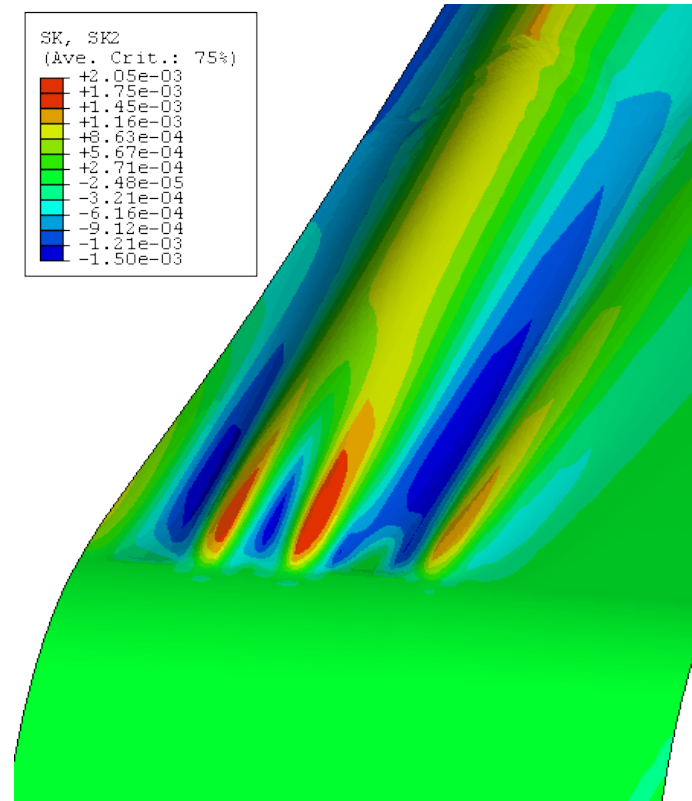
Extrait Doc ANSYS

The integration points used for these triangles are given in Table 13.2: "Numerical Integration for Triangles" and appear as shown in Figure 13.3: "Integration Point Locations for Triangles". L varies from 0.0 at an edge to 1.0 at the opposite vertex.





Plissement des tôles



Courbure dans le sens travers



Principe de résolution des EF



Passer d'un problème continu à discret (faire le maillage)

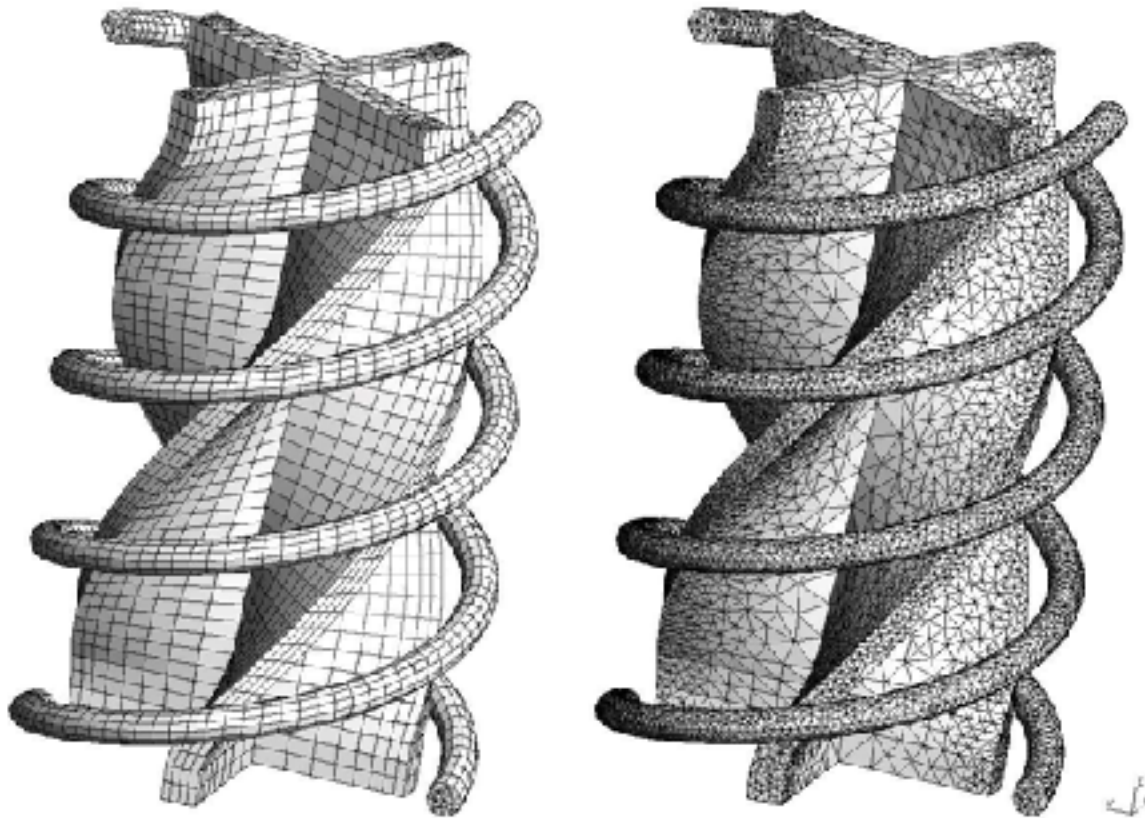
Déterminer les équations à résoudre (Choisir la formulation)

Déterminer les inconnues du problème (Choisir l'élément)

Résoudre le problème (Choisir de la méthode numérique)

Analyser les résultats (Post-traiter les fichiers)

Passer d'un problème continu à discret (faire le maillage)

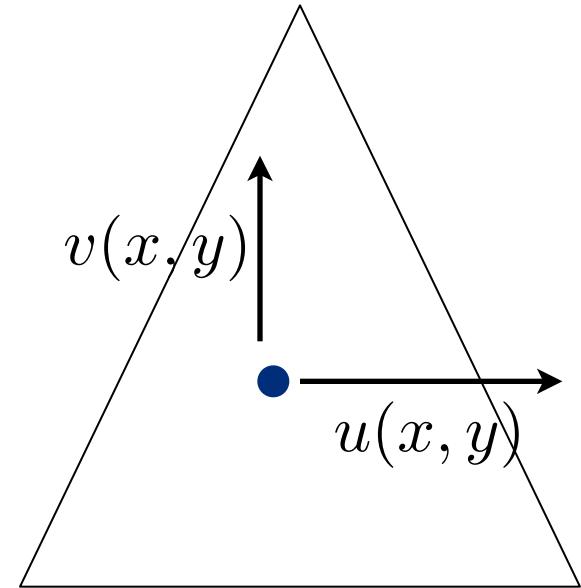


(<http://www.geuz.org/gmsh/>)

Approximation des déplacements 2D

$$\begin{cases} u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x,y) = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases}$$

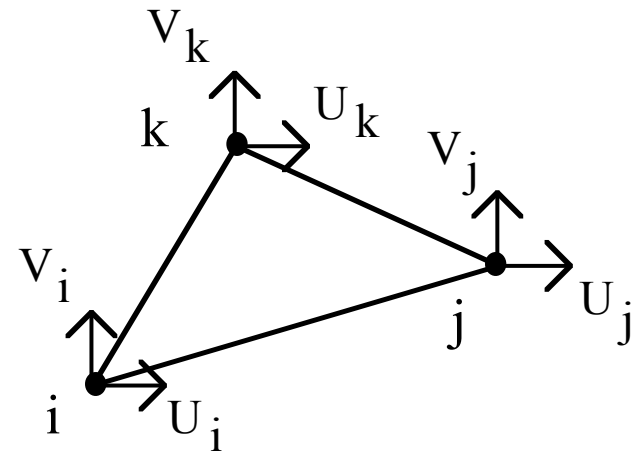
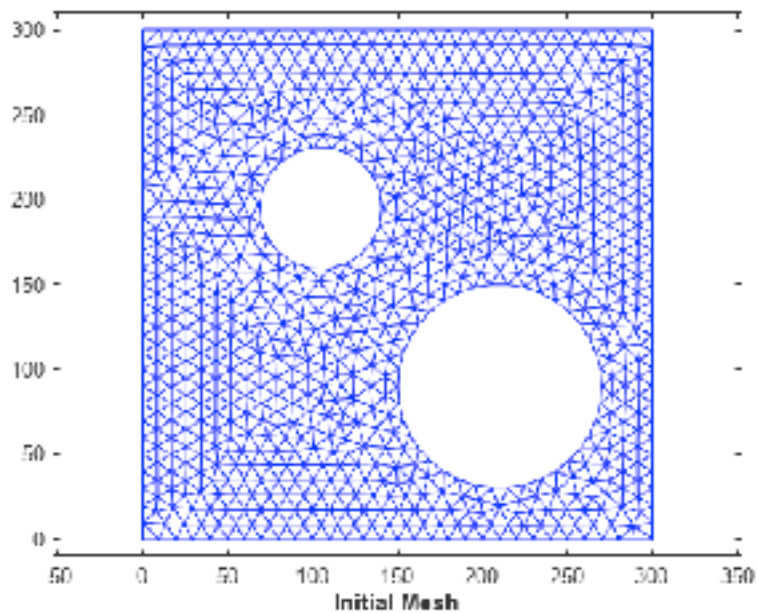
$$[U] = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$



$$[U]_e = [P(x,y)][a]_e$$

$[a]_e$ Pas très physique

Approximation nodale 2D

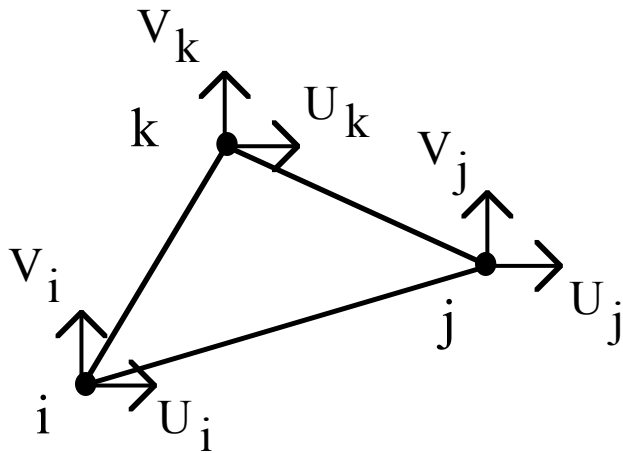


(i, j, k) sont les noeuds

Inconnues NODALES (ddl)

$$[Q] = [q_i] = [U_i \quad U_j \quad U_k \quad V_i \quad V_j \quad V_k]$$

Approximation nodale 2D



Inconnues NODALES (ddl)

$$[Q] = [q_i] = [U_i \quad U_j \quad U_k \quad V_i \quad V_j \quad V_k]$$

Déplacement sur l'élément

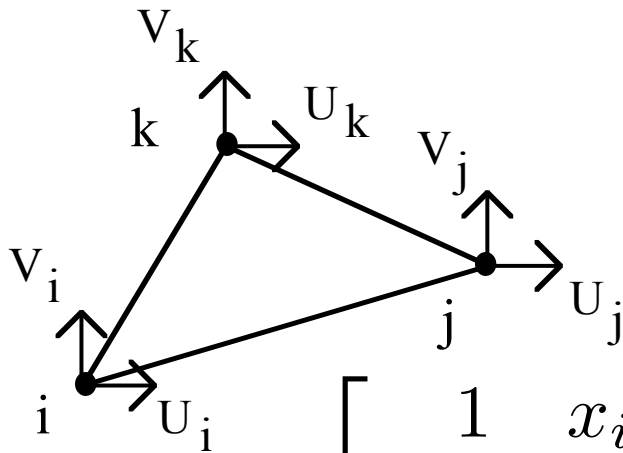
$$\begin{cases} u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [P(x, y)][a]_e$$

Approximation nodale 2D

Inconnues NODALES (ddl)

$$[Q] = [q_i] = [U_i \quad U_j \quad U_k \quad V_i \quad V_j \quad V_k]$$

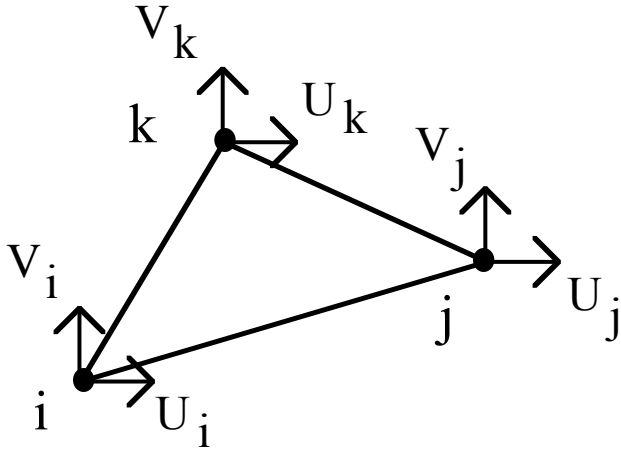


$${}^t [Q] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

Approximation nodale 2D

Inconnues NODALES (ddl)

$$[Q] = [q_i] = [U_i \quad U_j \quad U_k \quad V_i \quad V_j \quad V_k]$$

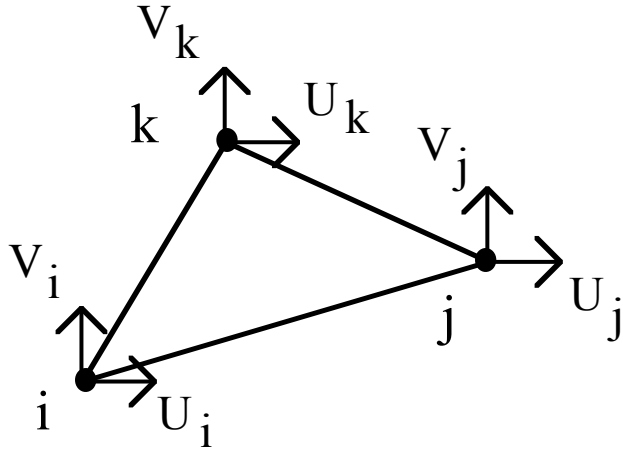


$${}^t [Q] = [P_{node}] [a]_e$$

Approximation nodale 2D

Inconnues NODALES (ddl)

$$[Q] = [q_i] = [U_i \quad U_j \quad U_k \quad V_i \quad V_j \quad V_k]$$



$$[U]_e = [P(x, y)] [P_n]^{-1} {}^t [Q]_e$$

$$= [N(x, y)] {}^t [Q]_e$$

$$= \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} {}^t [Q]_e$$

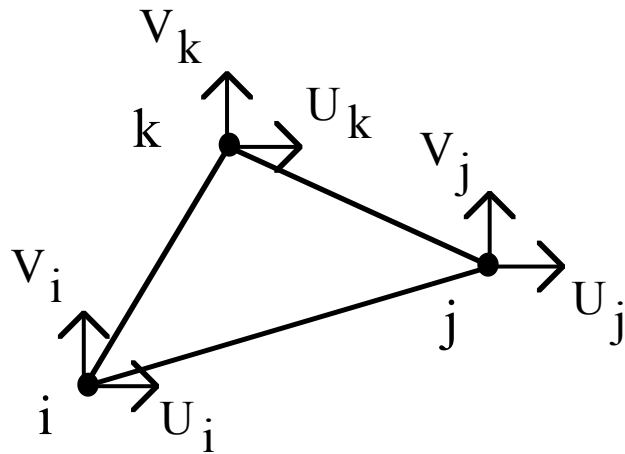
$[U]_e$ = Déplacement
dans l'élément

$[N(x, y)]$ = Fonctions de forme

Approximation nodale 2D hpp Déformation plane

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Approximation nodale 2D hpp Déformation plane



$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = [C] \begin{bmatrix} N_{x,x} \\ N_{x,y} \\ N_{y,x} \\ N_{y,y} \end{bmatrix}^t [Q]_e$$

$$= [B]_e^t [Q]_e$$



Approximation nodale 2D hpp Déformation plane

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

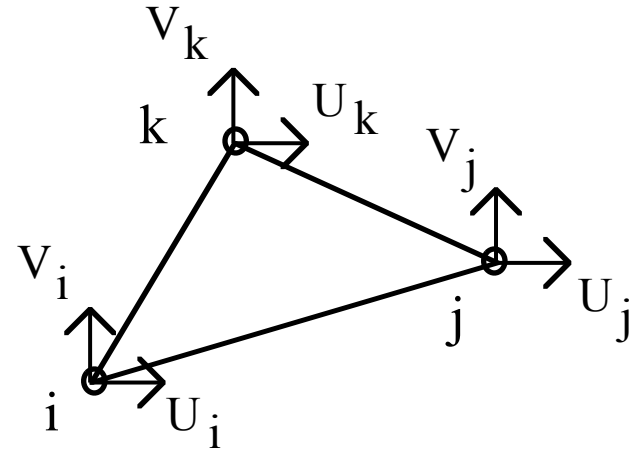
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}]_e = [D] [\varepsilon_{\alpha\beta}]_e$$

$$= [D] [B]_e^t [Q]_e$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

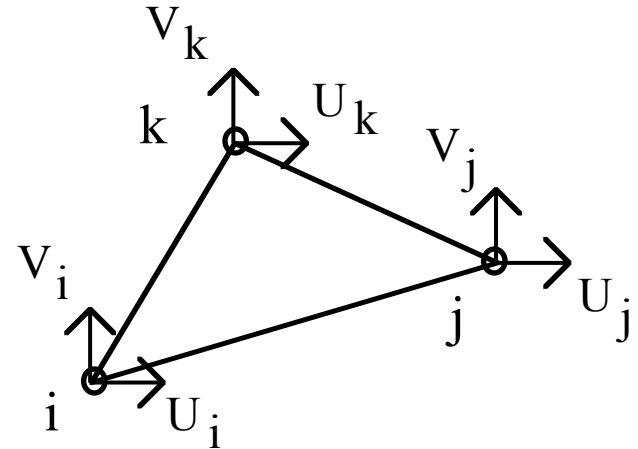
$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int \varepsilon L \varepsilon d\omega_e \\
 &= \frac{1}{2} \int_e^t [\varepsilon]_e [\sigma]_e d\omega_e \\
 &= \frac{1}{2} \int_e^t [\varepsilon]_e [D] [\varepsilon]_e d\omega_e \\
 &= \frac{1}{2} \int_e^t [Q]_e^t [\mathbf{B}]_e [D] [B]_e [Q]_e d\omega_e \\
 &= \frac{1}{2} {}^t [Q]_e \int_e^t [\mathbf{B}]_e [D] [B]_e d\omega_e [Q]_e \\
 &= \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e
 \end{aligned}$$





Matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_e^t [B]_e [D] [B]_e d\omega_e$$

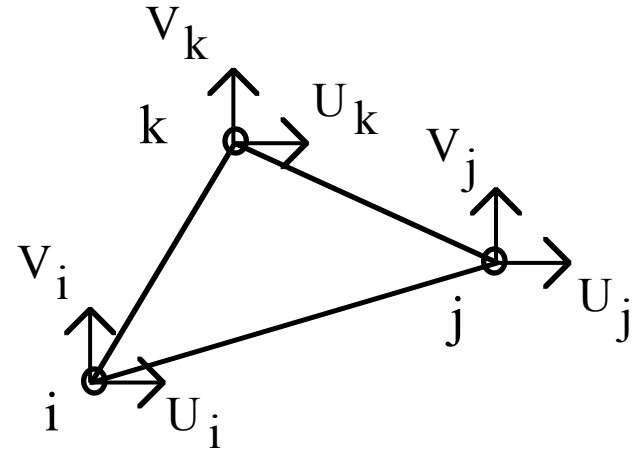


$[K]_e$ est symétrique positive

$[K]_e$ a trois Valeurs propres nulles et trois positives

Matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_e^t [B]_e [D] [B]_e d\omega_e$$



Energie de déformation élémentaire

$$W_e = \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e$$

Rq: Dans le cas des interpolations linéaires l'énergie de déformation élémentaire est directement proportionnelle à la surface de l'élément considéré.



Approximation du W des efforts ext dans un élément



Cas d'un élément qui est en contact avec la frontière où les efforts volumique donnés sont non-nuls

$$\begin{aligned} P_{d_e}(\mathbf{u}) &= \int_{\partial e} F_d u ds_e \\ &= \int_{\partial e} {}^t [F_d(x, y)] [U]_e ds_e \\ &= \int_{\partial e} {}^t [F_d(x, y)] [N] ds_e [Q]_e \\ &= \langle \mathbf{F}_{d_e}, \mathbf{Q} \rangle \\ &= {}^t [\mathbf{F}_{d_e}] \cdot [\mathbf{Q}]_e \end{aligned}$$



Énergie de Déformation élémentaire

$$\begin{aligned}\Pi_{de} &= \frac{1}{2} K_e (Q_e, Q_e) - \langle F_e, Q_e \rangle \\ &= \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e - \langle F_e, Q_e \rangle\end{aligned}$$

Assemblage matrice de rigidité

$$W = \sum_e W_e = \frac{1}{2} \sum_e {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e$$

Matrice de rigidité totale

$$[K]_T = \sum_e [K]_e$$

au sens de l'assemblage



$u(x) \in C.A\{u_d\} / \delta(\Pi_d(u)) = 0$ est solution du problème

$$\Pi_d = \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle$$

$$\begin{aligned} \delta(\Pi_d) &= \delta \left(\frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta ({}^t [Q]) [K]_t [Q] + \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t \delta ([Q]) - \delta ({}^t [Q]) [F]_t \\ &= \frac{1}{2} \delta ({}^t [Q]) [K]_t [Q] + \frac{1}{2} {}^t ({}^t [Q] [K]_t \delta ([Q])) - \delta ({}^t [Q]) [F]_t \\ &= \frac{1}{2} \delta ({}^t [Q]) [K]_t [Q] + \frac{1}{2} \delta ({}^t [Q]) {}^t [K]_t [Q] - \delta ({}^t [Q]) [F]_t \\ &= \delta ({}^t [Q]) [K]_t [Q] - \delta ({}^t [Q]) [F]_t \end{aligned}$$



Variation de l'énergie potentielle

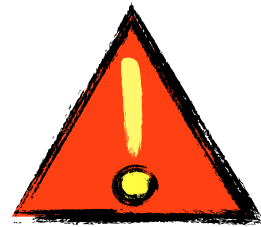


$u(x) \in C.A\{u_d\} / \delta(\Pi_d(u)) = 0$ est solution du problème

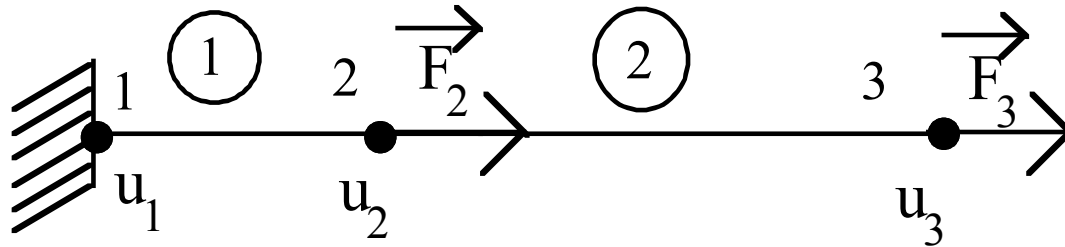
$$\Pi_d = \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle$$

$$\delta(\Pi_d) = \delta({}^t [Q]) ([K]_t [Q] - [F]_t) \quad \forall \delta({}^t [Q]) \in C.A\{0\}$$

$$[K]_t [Q] - [F]_t = 0$$



Exemple d'assemblage pour une structure simple



$$W_e = \frac{1}{2} {}^t [Q]_e [K]_e [Q]_e$$

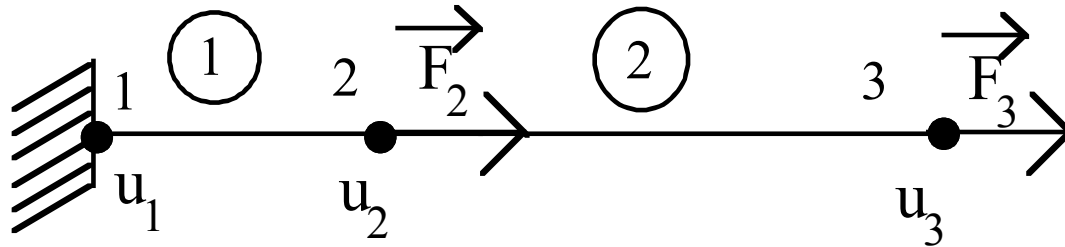
$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [Q]_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [Q]_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

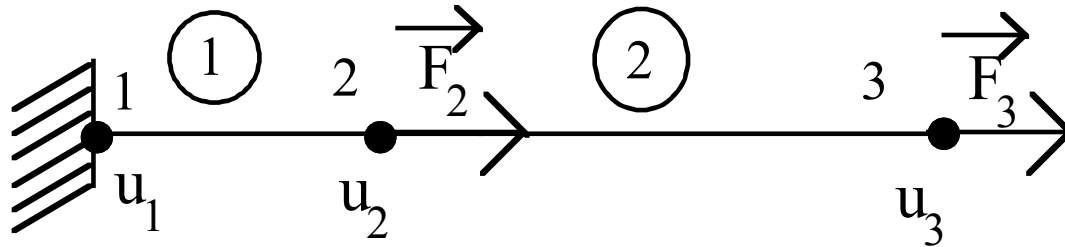
Exemple d'assemblage pour une structure simple



$$[K]_t = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Exemple d'assemblage pour une structure simple



$$\langle F_t, Q \rangle = {}^t [Q] [F]_t$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ et } [F]_t = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\langle F_{d_e}, Q \rangle = {}^t [F_{d_e}] \cdot [Q]_e$$



Selons VOus !!



Propriété de la Matrice de rigidité élémentaire

Que sont les dof ?

Matrice de comportement

Méthodes d'Intégration numérique



Méthode brutale

$$[K]_t [Q] = [F]_t$$

$$q_i = q_d$$

$[K]_t = [k_{ij}]_t$ devient :

$$[K]_t = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1(i-1)} & k_{1i} & k_{1(i+1)} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{(i-1)1} & \dots & k_{(i-1)(i-1)} & k_{(i-1)(i)} & k_{(i-1)(i+1)} & \dots & k_{(i-1)n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & k_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ k_{(i+1)1} & \dots & k_{(i+1)(i-1)} & k_{(i+1)(i)} & k_{(i+1)(i+1)} & \dots & k_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kn1 & \dots & kn(i-1) & kn(i) & kn(i+1) & \dots & knn \end{bmatrix}$$



Méthode brutale

$$q_i = q_d$$

$$[K]_t [Q] = [F]_t$$

$[F]_t = [fi]_t$ devient :

$$[F] = \begin{bmatrix} f1 \\ \vdots \\ f(i-1) \\ fi = kii * q_d \\ f(i+1) \\ \vdots \\ fn \end{bmatrix}$$



Méthode de pénalisation

$$Q_i = Q_d$$

$[K]_t = [k_{ij}]_t$ devient :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & k_{ii} + k & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$[F]_t = [f_i]_t$ devient

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{(i-1)} \\ f_i + k * q_d \\ f_{(i+1)} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

où $k = 10^{10} * \max(k_{ij})$:

Méthode de pénalisation

$$q_i = q_d$$

$$q_i = q_d \left(\frac{k}{k + k_{ii}} - \sum_{l \text{ prive de } i} \frac{q_l}{q_d} \frac{k_{il}}{k_{ii} + k} + \frac{f_i}{(k + k_{ii})_q} \right) \cong q_d (1 + e)$$



Méthode Lagrangienne

Cette méthode est la plus élégante car elle consiste à relaxer les **r** conditions aux limites

$$[R]_{r \times n} [Q] = [S] \quad q_i = q_d$$

$${}^t[\lambda] = [\lambda_1 \dots \lambda_r] \quad \text{Multiplicateur de Lagrange}$$



Méthode Lagrangienne

$$FV = \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle + {}^t [\lambda] ([R]_{r \times n} [Q] - [S])$$

$$\begin{aligned} \delta(FV) &= \delta \left(\frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle + {}^t [\lambda] ([R]_{r \times n} [Q] - [S]) \right) \\ &= \delta ({}^t [Q]) ([K]_t [Q] - [F]_t) + \delta ({}^t [\lambda]) ([R]_{r \times n} [Q]) \\ &\quad + {}^t [\lambda] [R]_{r \times n} \delta ([Q]) - \delta ({}^t [\lambda]) [S] \end{aligned}$$

$$\delta(FV) = 0 \quad \forall \delta ({}^t [Q]), \delta ({}^t [\lambda]) \in C.A (0)$$



Méthode Lagrangienne

$$FV = \frac{1}{2} {}^t [Q] [K] {}_t [Q] - \langle F_t, Q \rangle + {}^t [\lambda] ([R]_{r \times n} [Q] - [S])$$

$$\delta(FV) = 0 \quad \forall \delta({}^t [Q]), \delta({}^t [\lambda]) \in C.A(0)$$

$$\begin{bmatrix} [K] & {}^t [R] \\ [R] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ S \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \delta({}^t [Q]), \delta({}^t [\lambda]) \in C.A(0)$$



Méthode Lagrangienne

$$\begin{bmatrix} [K] & {}^t[R] \\ [R] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ S \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \delta ({}^t[Q]), \delta ({}^t[\lambda]) \in C.A(0)$$

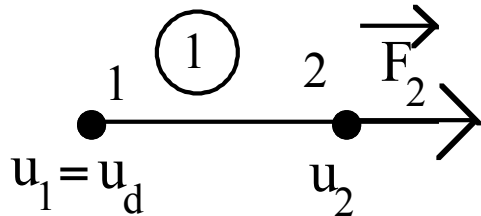
L'inconvénient principal est d'avoir introduit des inconnues supplémentaires.

L'avantage c'est que la condition est réalisée exactement tout en conservant la symétrie de la matrice à inverser.

Les inconnues supplémentaires donnent des informations supplémentaires.

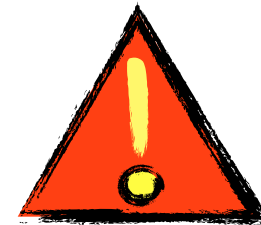
Méthode Lagrangienne

Exemple



$$[R] = [1 \quad 0] \quad [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & -k & 1 & u_1 \\ -k & k & 0 & u_2 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ u_d \end{bmatrix}$$



A quelles conditions peut on affirmer que

$$\Pi_{dt} = \sum_{elt} \Pi_e \quad \text{ou} \quad W_t = \sum_{elt} W_e$$

Considérons le cas 1-D (Poutre) Flexion

$$\begin{aligned} W_{fl} &= \frac{EI}{2} \int_{x_1}^{x_2} (v''(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} M(x)v''(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left([M(x)v'(x)]_{x_1}^{x_2} - [M'(x)v(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} M''(x)v(x) dx \right) \end{aligned}$$



Assemblons deux éléments, et donc leurs énergies de déformation

$$2W_{fl}^1 + 2W_{fl}^2 = \left[M^1(x)v'^1(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \left[M'^1(x)v^1(x) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} M''^1(x)v^1(x)dx \\ + \left[M^2(x)v'^2(x) \right]_{x_2}^{x_3} - \left[M'^2(x)v^2(x) \right]_{x_2}^{x_3} + \int_{x_2}^{x_3} M''^2(x)v^2(x)dx$$

$M(x)$ et $M'(x)$ sont continus s'il n'existe pas d'efforts ou de moments ponctuels

En regroupant les termes de raccord, on observe que :

$$M^1(x_2)(v'^1(x_2) - v'^2(x_2)) \quad \text{et} \quad M'^1(x_2)(v^1(x_2) - v^2(x_2))$$



Approximation Conforme



$$M^1(x_2)(v'^1(x_2) - v'^2(x_2)) \quad \text{et} \quad M'^1(x_2)(v^1(x_2) - v^2(x_2))$$

Si $v(x)$ et $v'(x)$ ne sont pas continue il y a stockage d'une énergie finie à chaque raccord.

On demande donc que $v(x)$ soit deux fois intégrables sur l'élément et seulement qu'elle soit à dérivée continue aux extrémités

Def : Un élément vérifiant ces propriétés de continuité est dit conforme.

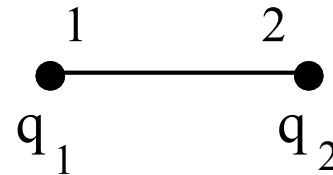
Rq : Dans le cas d'énergie dépendant d'un gradient, élasticité, il suffit que $u(x)$ soit continue.



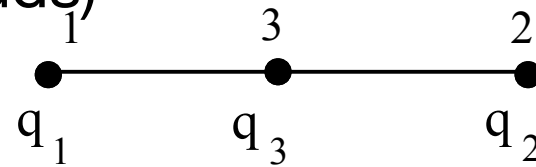
Quelques éléments



Barre à champ linéaire (2 noeuds)

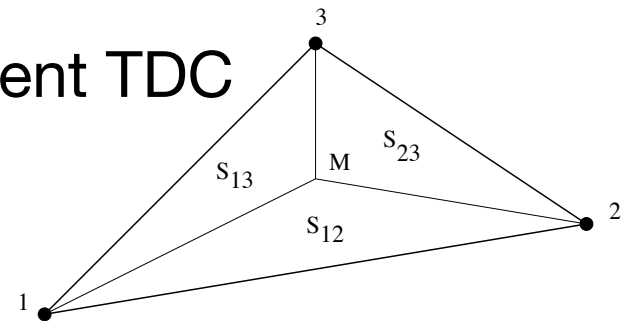


Barre à champ quadratique (3 noeuds)

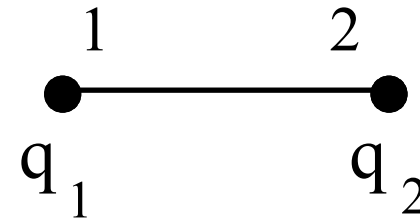
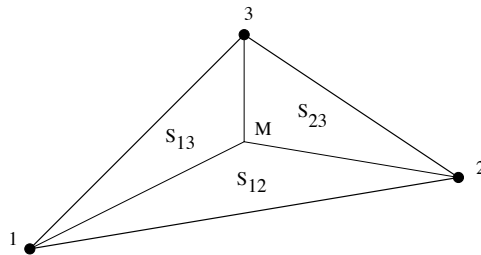


Elément réel

Matrice de rigidité élémentaire de l'élément TDC

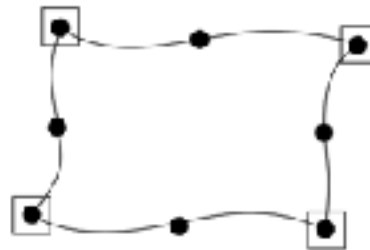


Un élément est dit isoparamétrique si on prend les mêmes fonctions d'interpolation pour le déplacement et la géométrie.

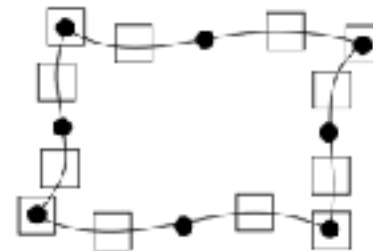


On définit également les éléments super et sous-paramétriques

- Point de définition du déplacement
- Point de définition des coordonnées



Élément superparamétrique

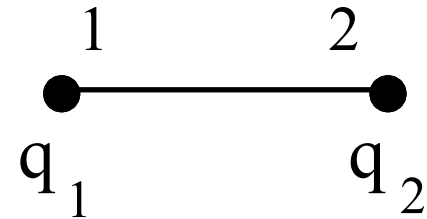


Élément sous-paramétrique



Élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction-compression dans une barre

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} ES(u'(x))^2 dx$$

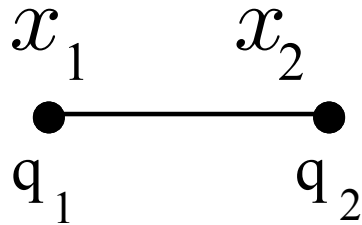


Interpolation

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

$$u(x) = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 = N_i(x)q_i$$

Élément réel

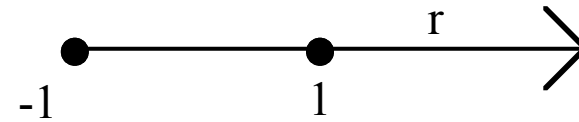


Fonction d'interpolation en déplacement

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x - x_1}{L} \\ N_2(x) = \frac{x - x_1}{L} \end{cases}$$

$$u(x) = N_i(x)q_i$$

Élément de référence

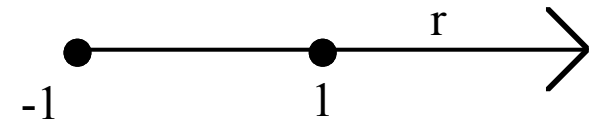


Fonction d'interpolation géométrique

$$\begin{aligned} x &= x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} \\ &= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r) \end{aligned}$$

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire sur l'Élément de référence

$$W_{ref}^{elem} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ES \left(\frac{du(r)}{dr} \right)^2 dr$$



$$W_{ref}^{elem} = \frac{1}{2} [Q]^T [K]_{ref} [Q]$$

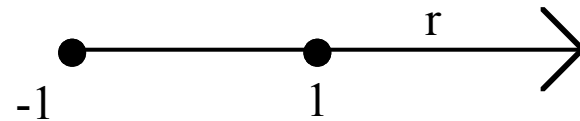
$${}^t [B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} \\ N_{2,r} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 {}^t [B] [D] [B] dr$$

$$[D] = [ES]$$

Calcul de la matrice de rigidité sur l'Élément de référence

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 t [B] [D] [B] dr$$



$$N_1(r) = \frac{(1 - r)}{2}$$

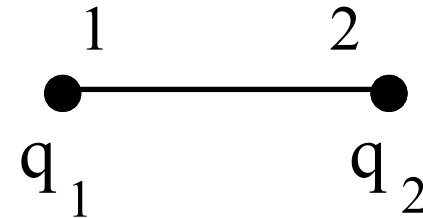
$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} [ES] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} dr$$

$$N_2(r) = \frac{(1 + r)}{2}$$

$$= ES \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice de rigidité sur l'Élément réel

$$\begin{aligned}
 [K]_e &= \int_{x_1}^{x_2} {}^t [B]_e [D] [B]_e dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{2}{L} {}^t [B] [D] \frac{2}{L} [B] \frac{L}{2} dr \\
 &= \frac{2}{L} [K]_{ref}
 \end{aligned}$$



$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dx}$$

$$dx = \frac{dx}{dr} dr = \frac{L}{2} dr$$



Elément Barre (2ddl)



$$[K]_e = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

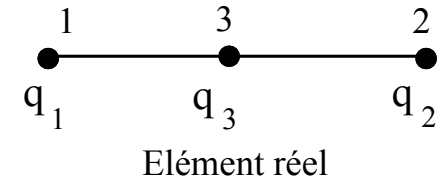
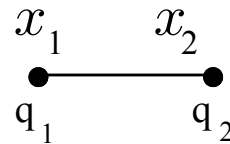
Modes propre de déformation ?



Lagrange - (les plus simples)

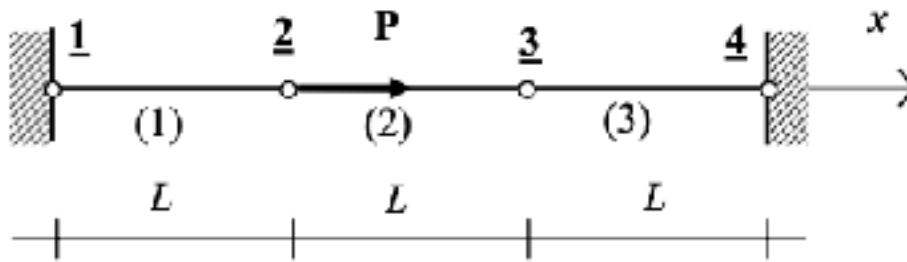
Les fonctions de bases locales de l'élément fini de Lagrange (K, Σ, P) à N points sont les N fonctions de P telles que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq N$

Éléments finis unidimensionnels



Élément	P_1	P_2	...	P_m
K	$[a; b]$	$[a; b]$...	$[a; b]$
Σ	$\{a, b\}$	$\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$...	$\{a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$
P	P_1	P_2	...	P_m

Cas d'un système à trois barres



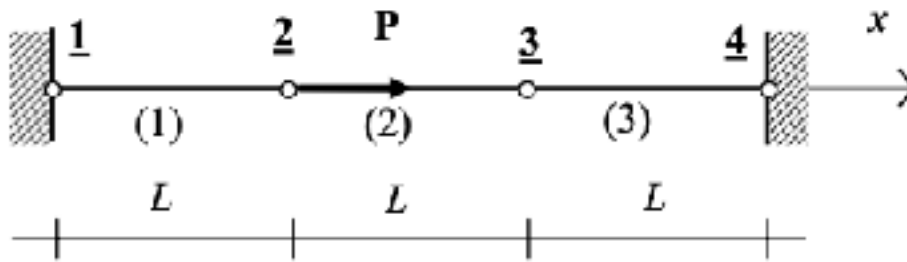
$$[K]_{e^{(i)}} = \frac{ES}{L^{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = u_4 = 0$$

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cas d'un système à trois barres



$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x - x_1}{L} \\ N_2(x_1) = \frac{x - x_1}{L} \end{cases}$$

sur l'élément i

$$u(x) = N_i(x)q_i$$

$$N(x) = ESu'(x) = N'_i(x)q_i$$

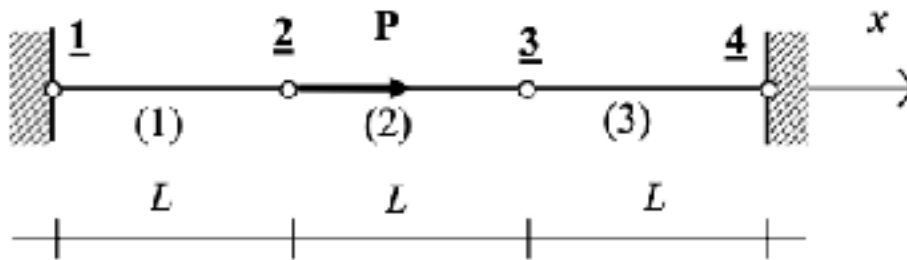
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2L}{3ES}P \\ \frac{L}{3ES}P \end{bmatrix}$$

$$R_0 = -N(0) = -ES \frac{1}{L} \frac{2L}{3ES} P = -\frac{2}{3}P$$

$$R_L = N(3L) = ES \frac{-1}{L} \frac{L}{3ES} P = -\frac{1}{3}P$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R}_0 + \vec{R}_L = \vec{0}$$

Cas d'un système à trois barres



$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x - x_1}{L} \\ N_2(x_1) = \frac{x - x_1}{L} \end{cases}$$

sur l'élément i

$$u(x) = N_i(x)q_i$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2L}{3ES} P \\ \frac{L}{3ES} P \end{bmatrix}$$

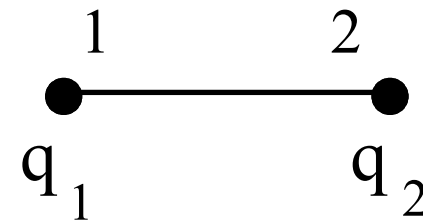
$$u\left(\frac{3L}{2}\right) = N_1^{(2)}\left(\frac{3L}{2}\right) \cdot u_2 + N_2^{(2)}\left(\frac{3L}{2}\right) \cdot u_3$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3ES} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{3ES} P$$

$$= \frac{1}{2} \frac{PL}{ES}$$



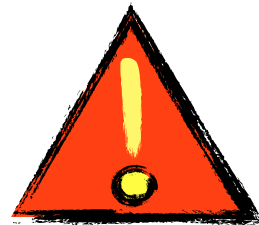
Calcul de la matrice de rigidité élémentaire sur l'Élément réel



Deux remarques :

Les matrices de rigidités élémentaires se déduisent de la matrice de rigidité élémentaire de référence

Comme l'interpolation des déplacements est linéaire, les contraintes et les déformations sont constantes sur l'élément.



Élément sub-paramétrique :

Géométrie Linéaire - continuité de déplacement et de sa dérivée

$$u = {}^T(N_1, N_2, N_3, N_4) \mathbf{u}_n$$



(a) Élément de référence

Fonction d'interpolation en déplacement

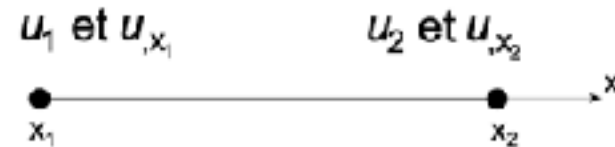
$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(\xi^2 - 1)(1 - \xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(\xi^2 - 1)(1 + \xi)$$

$${}^T\mathbf{u}_n = {}^T(u_1, u_{,x_1}, u_2, u_{,x_2})$$



(b) Segment réel (2 nœuds, 4ddl)

Fonction d'interpolation géométrique

$$x = x_1 \frac{1 - \xi}{2} + x_2 \frac{1 + \xi}{2}$$

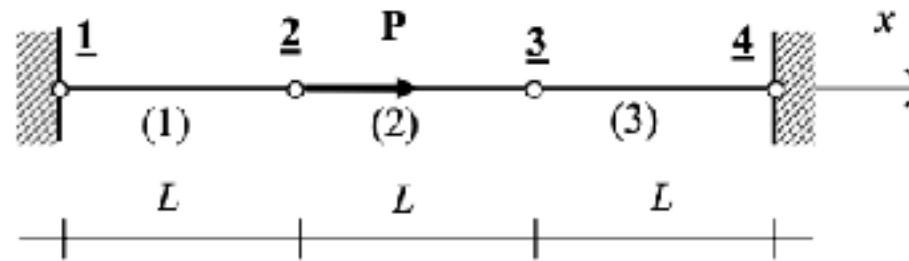
$$x = x_1 G_1(\xi) + x_2 G_2(\xi)$$



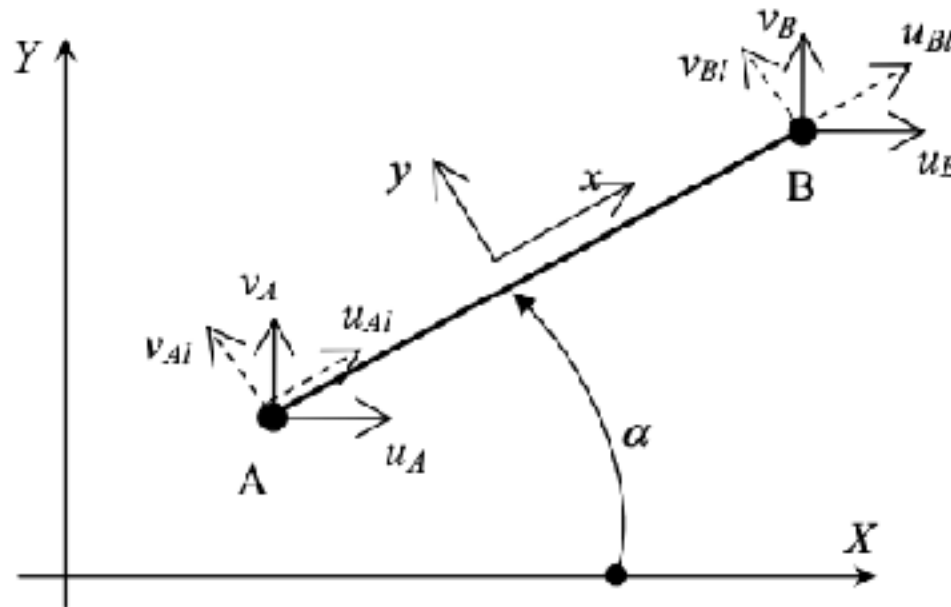
Déterminez K - Hermite



Déterminez K et résoudre



Comparer avec Lagrange



$$[K]_e = \frac{ES}{L_e} \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\cos^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

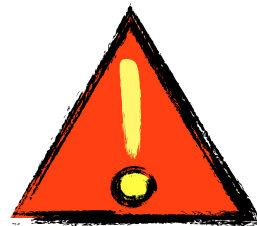
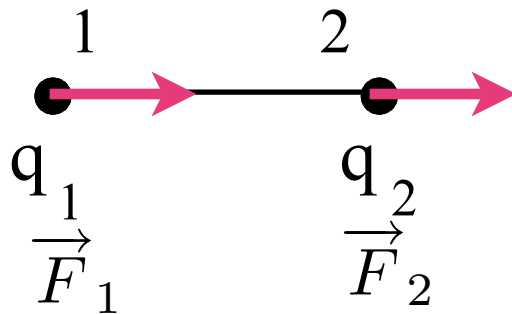
Problème Continu

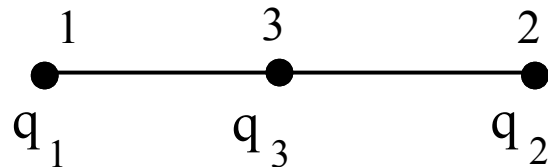
$$f(x) \vec{x}$$



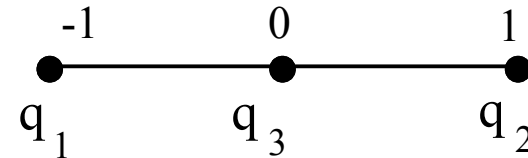
$$u(x)$$

Problème Discret





Élément réel



Élément de référence

Déplacement

$$u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

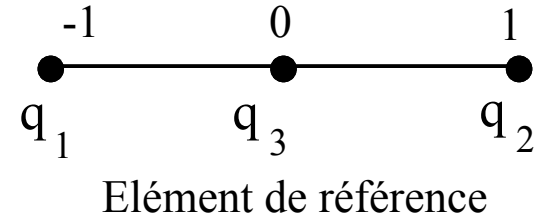
$$u(x) = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 + N_3(x)q_3 = N_i(x)q_i$$

Fonction d'interpolation

$$\begin{cases} u(-1) = q_1 \\ u(0) = q_3 \\ u(1) = q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(-1) = 1 \\ N_2(-1) = 0 \\ N_3(-1) = 0 \end{cases}; \begin{cases} N_1(0) = 0 \\ N_2(0) = 0 \\ N_3(0) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_1(1) = 0 \\ N_2(1) = 1 \\ N_3(1) = 0 \end{cases}$$

Fonction
d'interpolation du
déplacement

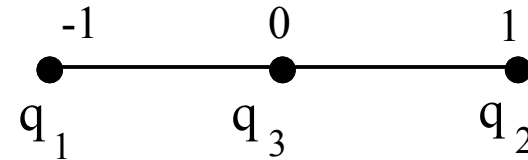
$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(r) = \frac{r(r-1)}{2} \\ N_2(r) = \frac{r(r+1)}{2} \\ N_3(r) = (1-r^2) \end{array} \right.$$



Fonction
d'interpolation
géométrique

$$\begin{aligned} x &= x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} \\ &= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r) \end{aligned}$$

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 {}^t [B] [D] [B] dr$$



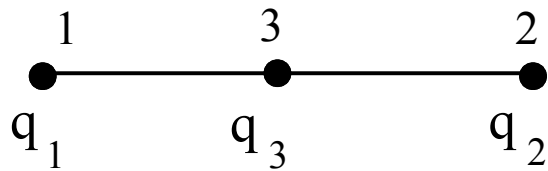
Élément de référence

$$\text{où } {}^t [B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} \\ N_{2,r} \\ N_{3,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r-1}{2} \\ \frac{2r+1}{2} \\ -2r \end{bmatrix}$$

$$[K]_{ref} = \int_{-1}^1 ES \begin{bmatrix} (N_{1,r})^2 & N_{1,r}N_{2,r} & N_{1,r}N_{3,r} \\ & (N_{2,r})^2 & N_{2,r}N_{3,r} \\ \text{Symm} & & (N_{3,r})^2 \end{bmatrix} dr$$



Élément Barre (3ddl)



Élément réel

$$[K]_e = \int_{x_1}^{x_2} {}^t [B]_e [D] [B]_e dx$$

$${}^t [B]_e = \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,x} \\ N_{3,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} \frac{dr}{dx} \\ N_{2,r} \frac{dr}{dx} \\ N_{3,r} \frac{dr}{dx} \end{bmatrix} = \frac{2}{L} {}^t [B]$$

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_{x_1}^{x_2} {}^t [B]_e [D] [B]_e dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{L} {}^t [B] [D] \frac{2}{L} [B] \frac{L}{2} dr \\ &= \frac{2}{L} [K]_{ref} \end{aligned}$$



$$[K]_e = \frac{2}{L} \int_{-1}^1 ES \begin{bmatrix} (N_{1,r})^2 & N_{1,r}N_{2,r} & N_{1,r}N_{3,r} \\ & (N_{2,r})^2 & N_{2,r}N_{3,r} \\ \text{Symm} & & (N_{3,r})^2 \end{bmatrix} dr$$

Méthode de Newton-Cotes

Méthode de Gauss



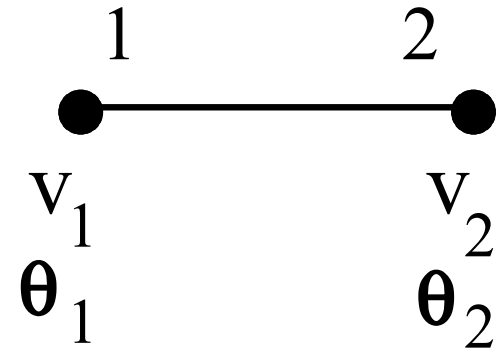
Problèmes de flexion

Energie de déformation de flexion :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (EI v''(x))^2 dx$$

Inconnues nodales réelles

$$[Q] = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2] \quad \text{où } \theta_i = \frac{\partial v}{\partial x}(x_i)$$





Problèmes de flexion

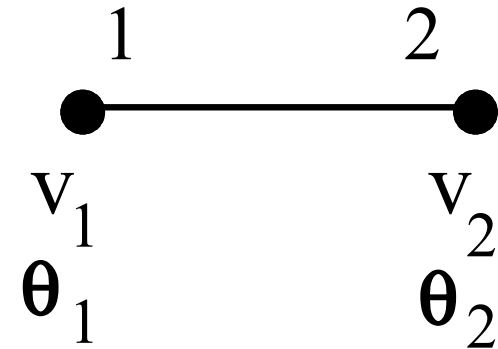
Energie de déformation de flexion

Écriture matricielle :

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} {}^t [Q] {}^t [B]_e [D] [B]_e [Q] dx \\ &= {}^t [Q] [K_e] [Q] \end{aligned}$$

où

$$[Q] = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2]$$



Problèmes de flexion

$$W_{ref} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI v''(r))^2 dr$$

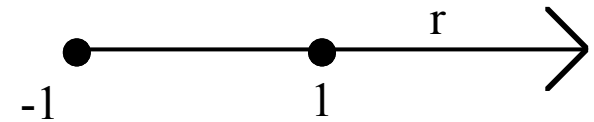
Inconnues nodales sur
l'élément de référence

$$[Q]^r = [v_1, \theta_1^r, v_2, \theta_2^r]$$

où

$$\theta_i^r = \frac{\partial v}{\partial r} (-1 \text{ ou } 1)$$

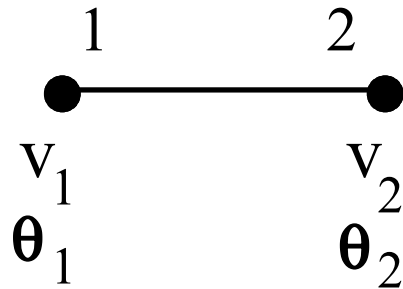
Élément de référence



Fonction d'interpolation
géométrique

$$\begin{aligned} x &= x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} \\ &= x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r) \end{aligned}$$

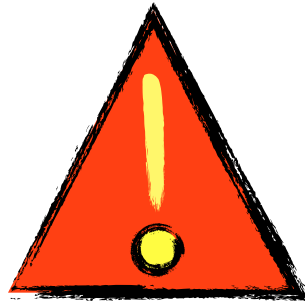
Élément réel



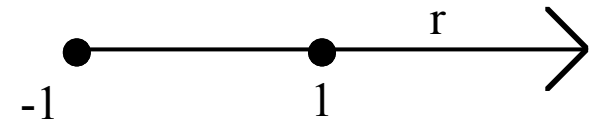
$$[Q] = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2]$$

où

$$\theta_i = \frac{\partial v}{\partial x}(x_i)$$



Élément de référence



$$[Q]^r = [v_1, \theta_1^r, v_2, \theta_2^r]$$

où

$$\theta_i^r = \frac{\partial v}{\partial r}(-1 \text{ ou } 1)$$



Élément réel

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2$$

Élément de référence

$$v(r) = N_1(r) v_1 + N_2(r) \theta_1^r + N_3(r) v_2 + N_4(r) \theta_2^r$$

Fonction d'interpolation du déplacement

$$\begin{cases} N_1(r) = \frac{1}{4} (2+r)(r-1)^2, & N_2(r) = \frac{1}{4} (1-r^2)(1-r) \\ N_3(r) = \frac{1}{4} (2-r)(r+1)^2, & N_4(r) = \frac{1}{4} (r^2-1)(1+r) \end{cases}$$

$$x = x_1 \frac{1-r}{2} + x_2 \frac{1+r}{2} = x_1 G_1(r) + x_2 G_2(r)$$

$$W_{ref} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI v''(r))^2 dr$$

Mise en place de la matrice de rigidité élémentaire

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} v(r) &= N_{1,rr} v_1 + N_{2,rr} \theta_1^r + N_{3,rr} v_{2r} + N_{4,rr} \theta_2^r \\ &= {}^t [Q]^r {}^t [B]^r \\ &= N_{1,rr} v_1 + N_{2,rr} \theta_1 \frac{dx}{dr} + N_{3,rr} v_{2r} + N_{4,rr} \theta_2 \frac{dx}{dr} \\ &= {}^t [Q]^t \left[N_{1,rr} \quad \left(N_{2,rr} \frac{dx}{dr} \right) \quad N_{3,rr} \quad \left(N_{4,rr} \frac{dx}{dr} \right) \right] \\ &= {}^t [Q]^t [B] \end{aligned}$$





$$W_{ref} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (EI v''(r))^2 dr$$

Mise en place de la matrice de rigidité élémentaire

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} v(x) &= {}^t [Q] {}^t [B]_e \\ [B]_e &= [N_{1,xx} N_{2,xx} N_{3,xx} N_{4,xx}] \\ [B]_e &= \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 [B]^r = \frac{4}{L^2} [B]^r \\ &= \frac{4}{L^2} \left[N_{1,rr} \left(\frac{dx}{dr} N_{2,rr}\right) N_{3,rr} \left(\frac{dx}{dr} N_{4,rr}\right) \right] \end{aligned}$$



Mise en place de la matrice de rigidité élémentaire

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI v''(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} {}^t [Q] [K]_{el} [Q] \end{aligned}$$

$$[K]_{el} = \int_{x_1}^{x_2} {}^t [B]_e [D] [B]_e dx = \int_{-1}^1 \frac{4}{L^2} {}^t [B]^r [D] \frac{4}{L^2} [B]^r \frac{L}{2} dr$$



Mise en place de la matrice de rigidité élémentaire - poutre flexion -

$$[K]_{el} = \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 EI \begin{bmatrix} (N_{1,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{1,rr} N_{2,rr} & N_{1,rr} N_{3,rr} & \frac{L}{2} N_{1,rr} N_{4,rr} \\ \frac{L^2}{4} (N_{2,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{2,rr} N_{3,rr} & \frac{L^2}{4} N_{2,rr} N_{4,rr} \\ \text{sym} & (N_{3,rr})^2 & \frac{L}{2} N_{3,rr} N_{4,rr} \\ & & \frac{L^2}{4} (N_{4,rr})^2 \end{bmatrix} dr$$



Élément triangulaire - 2D



Nous allons illustrer ce qui précède dans un cas simple : élasticité plane, éléments triangulaires à trois noeuds.

En élasticité plane

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} &= \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{21}\epsilon_{21} \\ &= \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12}\end{aligned}$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} = \{\epsilon\}^T \underline{E} \{\epsilon\} \quad \text{avec} \quad \{\epsilon\} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix}$$



avec, en contraintes planes,

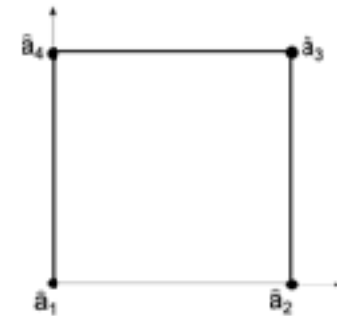
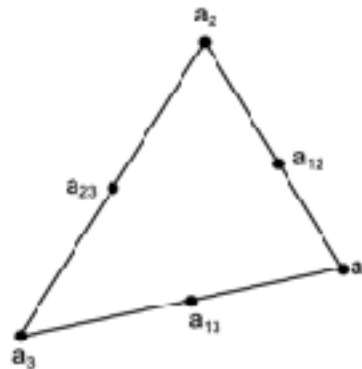
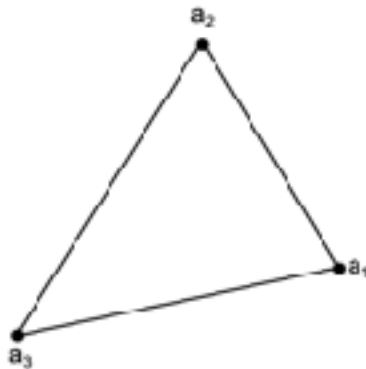
$$\underline{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

et, en déformations planes,

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Lagrange - (les plus simples)

Éléments finis bidimensionnels



Élément	P_1	P_2
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_{ij} = \frac{v_i + v_j}{2}, 1 \leq i, j \leq 3\}$
P	P_1	P_2

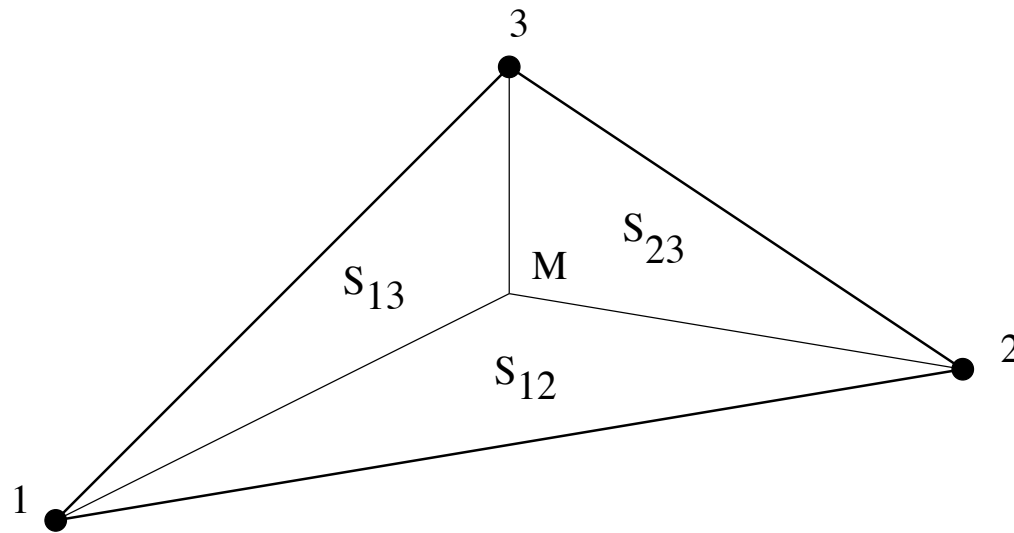
Élément	Q_1
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
P	Q_1



Élément triangulaire



Nous utilisons des éléments triangles à trois noeuds, encore appelés triangles à déformation constante (TDC).





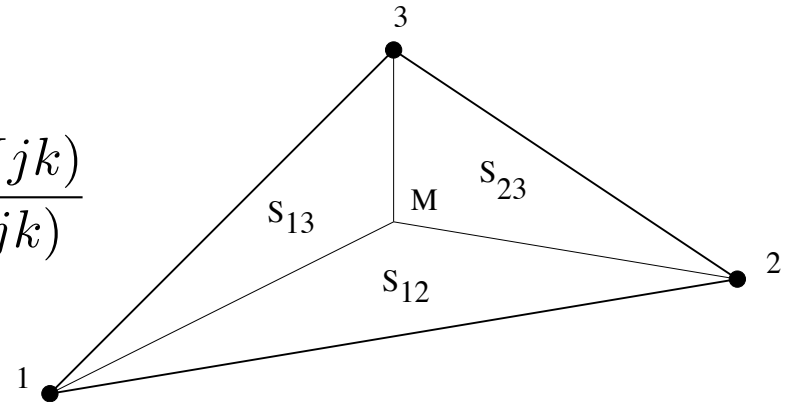
Élément triangulaire



On utilise les fonctions d'interpolation

$$L_i(M) = \frac{S(Mjk)}{S(ijk)}$$

qui vérifient à l'évidence



$$L_i(M) + L_j(M) + L_k(M) = 1 \quad , \quad L_i(j) = \delta_{ij} \quad , \quad M \in (jk) \Rightarrow L_i(M) = 0$$

$$\int_{\Delta} L_1^p L_2^q L_3^r dS = 2\Delta \frac{p! q! r!}{(p + q + r + 2)!}$$



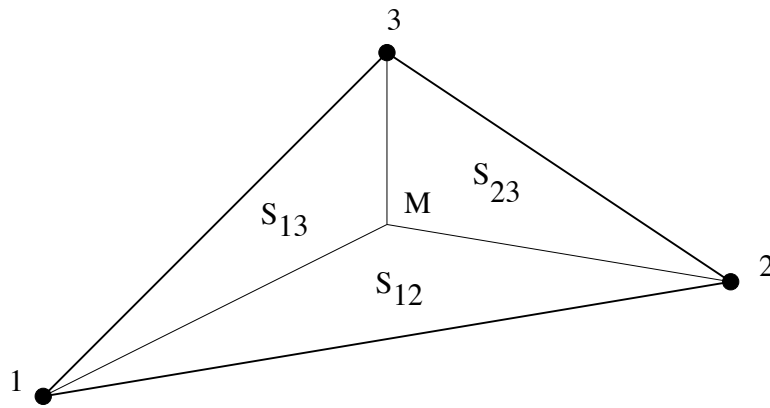
Élément triangulaire



Le champ de déplacements est donné par

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

le champ de déformations est donné par



$$\{\epsilon\} = [B] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

avec

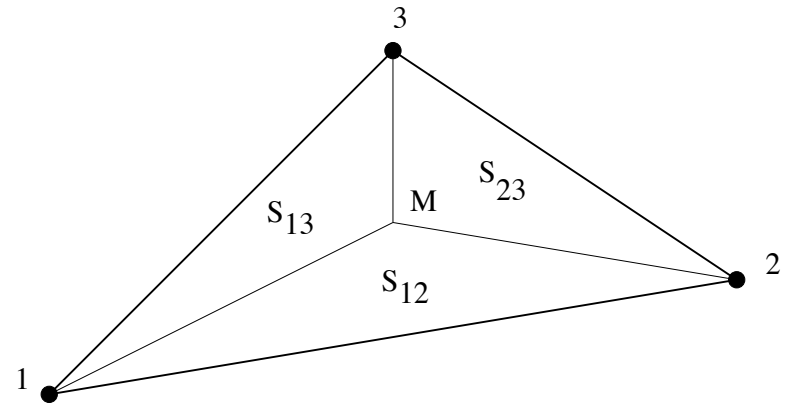
$$[B] = \begin{bmatrix} L_{1,x} & L_{2,x} & L_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{1,y} & L_{2,y} & L_{3,y} \\ L_{1,y} & L_{2,y} & L_{3,y} & L_{1,x} & L_{2,x} & L_{3,x} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire est donnée par

$$[\underline{k}] = e \int_{(ijk)} [\underline{B}]^T \underline{E} [\underline{B}] dS$$

avec e l'épaisseur de la plaque

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$





La matrice de rigidité élémentaire est donnée par

$$[\underline{k}] = e \int_{(ijk)} [\underline{B}]^T \underline{E} [\underline{B}] dS$$

avec e l'épaisseur de la plaque

on obtient, pour le triangle (1, 2, 3) de surface Δ

$$[\underline{B}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 & y_1 - y_3 & y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_3 & x_3 - x_1 & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 & x_1 - x_2 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$



La matrice de rigidité élémentaire est donnée par

$$[\underline{k}] = e \int_{(ijk)} [\underline{B}]^T \underline{E} [\underline{B}] dS$$

avec e l'épaisseur de la plaque

Pour $[\underline{k}]$, comme il n'y a pas de dépendance en x, y

$$[\underline{k}] = e \Delta [\underline{B}]^T \underline{E} [\underline{B}]$$

La suite du calcul est aisée mais fastidieuse.



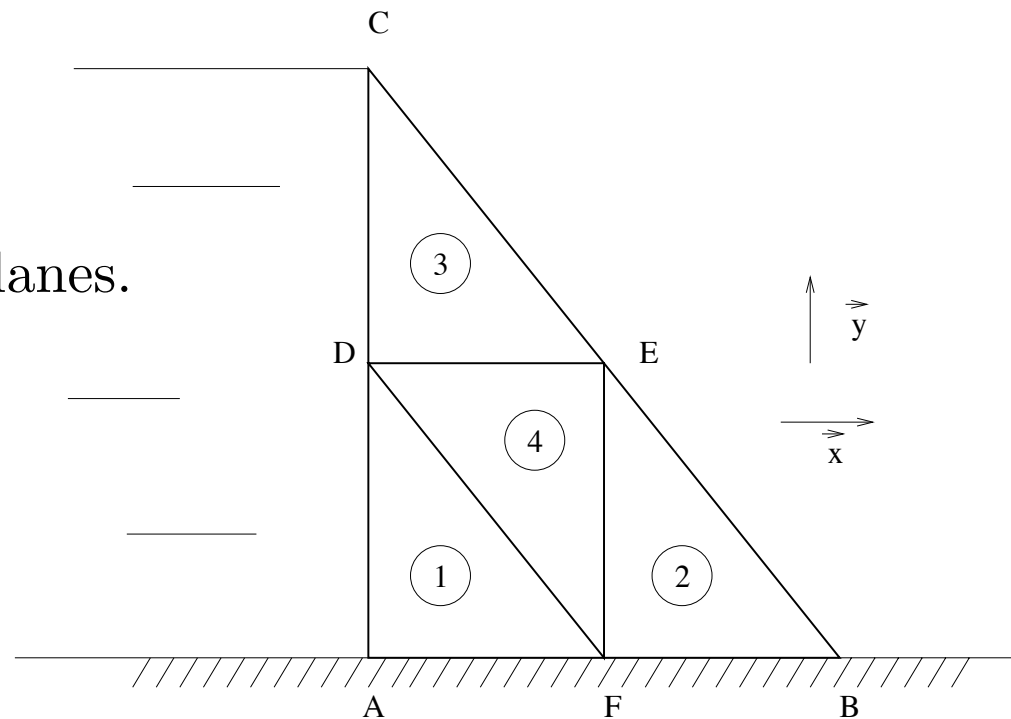
Élément triangulaire



Exemple : barrage masse

Nous considérons un barrage dont la section est un triangle rectangle de base $2a$, de hauteur $2h$.

On travaille en déformations planes.





Exemple Barrage - Élément triangulaire



Exemple : barrage masse

Nous considérons un barrage dont la section est un triangle rectangle de base $2a$, de hauteur $2h$.

Le chargement comporte une pression hydrostatique sur la face AC de densité ,

$$\vec{F} = \rho g (2h - y)\vec{x}$$

ainsi que le poids propre du barrage, force volumique de densité $-\rho_b g \vec{y}$.

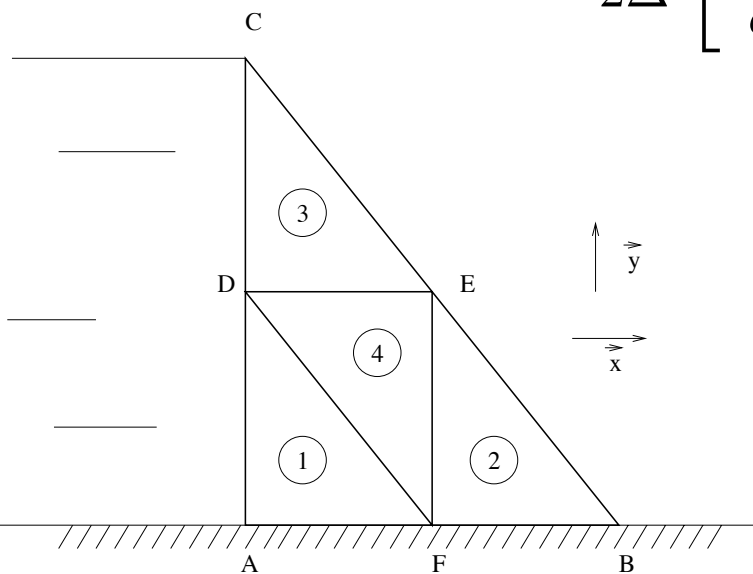


Exemple Barrage - Élément triangulaire



Il est évident que les éléments 1, 2, et 3 ont même matrice de rigidité élémentaire. Pour ces éléments, en numérotant les noeuds $1 = A$, $2 = F$, et $3 = D$, il vient

$$[\underline{B}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} h & -h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & h & -h & 0 \end{bmatrix}$$



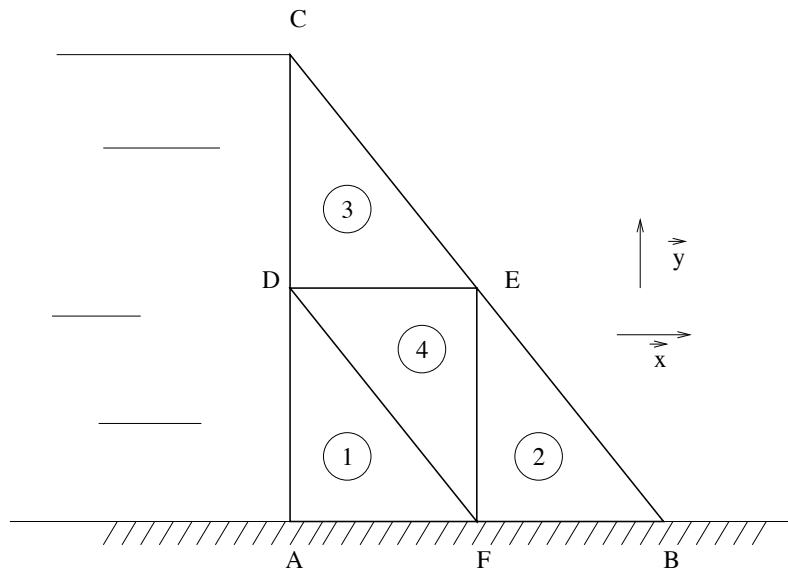


Exemple Barrage - Élément triangulaire



On obtient:

$$[k] = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)h^2 + \mu a^2 & -(\lambda + 2\mu)h^2 & -\mu a^2 & (\lambda + \mu)ah & -\mu ah & -\lambda ah \\ -(\lambda + 2\mu)h^2 & (\lambda + 2\mu)h^2 & 0 & -\lambda ah & 0 & \lambda ah \\ -\mu a^2 & 0 & \mu a^2 & -\mu ah & \mu ah & 0 \\ (\lambda + \mu)ah & -\lambda ah & -\mu ah & (\lambda + 2\mu)a^2 + \mu h^2 & -\mu h^2 & -(\lambda + 2\mu)a^2 \\ -\mu ah & 0 & \mu ah & -\mu h^2 & \mu h^2 & 0 \\ -\lambda ah & \lambda ah & 0 & -(\lambda + 2\mu)a^2 & 0 & (\lambda + 2\mu)a^2 \end{bmatrix}$$





Exemple Barrage - Élément triangulaire



De même, pour DEF , en numérotant $1 = F$, $2 = E$, et $3 = D$,

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & -h & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -a & 0 \\ a & -a & 0 & 0 & -h & h \end{bmatrix}$$

et

$$[k] = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} \mu a^2 & -\mu a^2 & 0 & 0 & -\mu a h & \mu a h \\ -\mu a^2 & (\lambda + 2\mu)h^2 + \mu a^2 & -(\lambda + 2\mu)h^2 & -\lambda a h & (\lambda + \mu) a h & -\mu a h \\ 0 & -(\lambda + 2\mu)h^2 & (\lambda + 2\mu)h^2 & \lambda a h & -\lambda a h & 0 \\ 0 & -\lambda a h & \lambda a h & (\lambda + 2\mu)a^2 & -(\lambda + 2\mu)a^2 & 0 \\ -\mu a h & (\lambda + \mu) a h & -\lambda a h & -(\lambda + 2\mu)a^2 & (\lambda + 2\mu)a^2 + \mu h^2 & -\mu h^2 \\ \mu a h & -\mu a h & 0 & 0 & -\mu h^2 & \mu h^2 \end{bmatrix}$$



Exemple Barrage - Élément triangulaire



En introduisant les notations

$$\alpha = (\lambda + 2\mu)h^2 \quad , \quad \beta = \mu a^2 \quad , \quad \gamma = (\lambda + \mu)ah \quad , \quad \delta = \mu ah$$

$$\epsilon = \lambda ah \quad , \quad \phi = (\lambda + 2\mu)a^2 \quad , \quad \theta = \mu h^2$$

et, pour la matrice de rigidité globale,

$$[\underline{K}] = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{uv} \\ \underline{K}_{vu} & \underline{K}_{vv} \end{bmatrix} \quad (\underline{K}_{uv} = \underline{K}_{vu})$$



Exemple Barrage - Élément triangulaire



$$\underline{K}_{uu} = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & -\beta & 2(\alpha + \beta) & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 2(\alpha + \beta) & -2\beta \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 & -2\beta & 2(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{vv} = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} \phi + \theta & 0 & 0 & -\phi & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & \phi & -\phi & 0 & 0 \\ -\phi & 0 & -\phi & 2(\phi + \theta) & -2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\theta & 2(\phi + \theta) & -2\phi \\ -\theta & -\theta & 0 & 0 & -2\phi & 2(\phi + \theta) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{uv} = \frac{e}{4\Delta} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\epsilon & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 \\ -\delta & 0 & -\epsilon & \gamma & -\delta - \epsilon & \delta + \epsilon \\ 0 & \delta & \epsilon & -\delta - \epsilon & \gamma & -\delta - \epsilon \\ -\epsilon & -\delta & 0 & \delta + \epsilon & -\delta - \epsilon & \gamma \end{bmatrix}$$



Exemple Barrage - Élément triangulaire



Ici, les déplacements imposés sont :

$$u_A = u_B = u_F = v_A = v_B = v_F = 0.$$

alors que les déplacements des noeuds non liés sont solution de

$$\begin{bmatrix} \beta & -\beta & 0 & 0 & -\delta & \delta \\ -\beta & 2(\alpha + \beta) & -2\alpha & -\epsilon & \gamma & -\delta - \epsilon \\ 0 & -2\alpha & 2(\alpha + \beta) & \epsilon & -\epsilon - \delta & \gamma \\ 0 & -\epsilon & \epsilon & \phi & -\phi & 0 \\ -\delta & \gamma & -\delta - \epsilon & -\phi & 2(\phi + \theta) & -2\theta \\ \delta & -\delta - \epsilon & \gamma & 0 & -2\theta & 2(\phi + \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_D \\ u_E \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Dx} \\ F_{Ex} \\ F_{Cy} \\ F_{Dy} \\ F_{Ey} \end{bmatrix}$$



Exemple Barrage - Élément triangulaire



donc, pour les réactions d'appui, les relations

$$\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Fx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta & 0 & \delta + \epsilon & -\delta - \epsilon \\ 0 & -\delta & 0 & 0 & -\phi & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta + \epsilon & -\delta - \epsilon & 0 & 0 & -2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_D \\ u_E \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix}$$



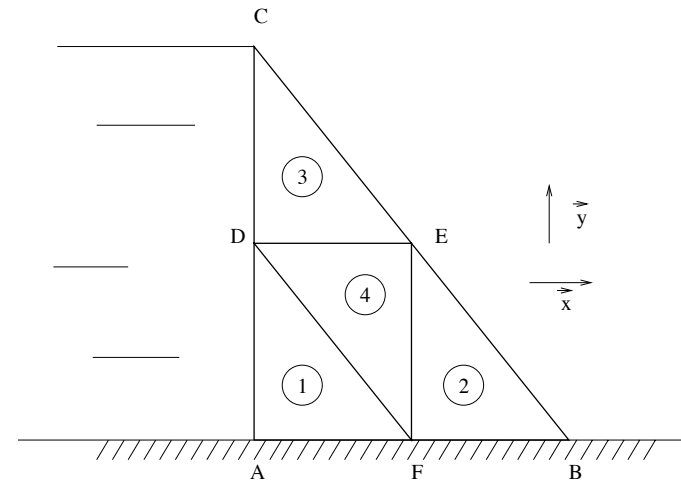
Exemple Barrage - Élément triangulaire



Le calcul des forces nodales équivalentes est immédiat. Pour chaque élément e qui contient le noeud n , on a, en se limitant aux forces surfaciques

On obtient finalement
$$F_{ni}^e = \int_{\partial\Omega \cap e} F_i(\vec{x}) \phi_n^e(\vec{x}) dS$$

	<i>DEC</i>	<i>AFD</i>	Total
F_{Cx}	$\rho g e h^2 / 6$	0	$\rho g e h^2 / 6$
F_{Dx}	$\rho g e 2h^2 / 3$	$\rho g e 2h^2 / 3$	$\rho g e 4h^2 / 3$
F_{Ax}	0	$\rho g e 5h^2 / 6$	$\rho g e 5h^2 / 6$





Exemple Barrage - Élément triangulaire



Les forces nodales équivalentes pour le chargement volumique sont obtenues sans difficulté :

pour chaque noeud n , la contribution de l'élément e comportant le noeud n est

$$F_{n,e,x}^{vol} = 0$$

$$F_{n,e,y}^{vol} = -\rho_b g e \frac{\Delta_e}{3}$$

où Δ_e est la surface du triangle concerné.



Exemple Barrage - Élément triangulaire



alors y a plus qu'à résoudre ce système

$$\begin{bmatrix} \beta & -\beta & 0 & 0 & -\delta & \delta \\ -\beta & 2(\alpha + \beta) & -2\alpha & -\epsilon & \gamma & -\delta - \epsilon \\ 0 & -2\alpha & 2(\alpha + \beta) & \epsilon & -\epsilon - \delta & \gamma \\ 0 & -\epsilon & \epsilon & \phi & -\phi & 0 \\ -\delta & \gamma & -\delta - \epsilon & -\phi & 2(\phi + \theta) & -2\theta \\ \delta & -\delta - \epsilon & \gamma & 0 & -2\theta & 2(\phi + \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ u_D \\ u_E \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho g e h^2}{6} \\ \frac{\rho g e 4h^2}{3} \\ 0 \\ -\rho_b g e \frac{\Delta_e}{3} \\ -\rho_b g e \Delta_e \\ -\rho_b g e \Delta_e \end{bmatrix}$$

Merci à M.E. Haglund



Élément triangulaire



Exemple : barrage masse

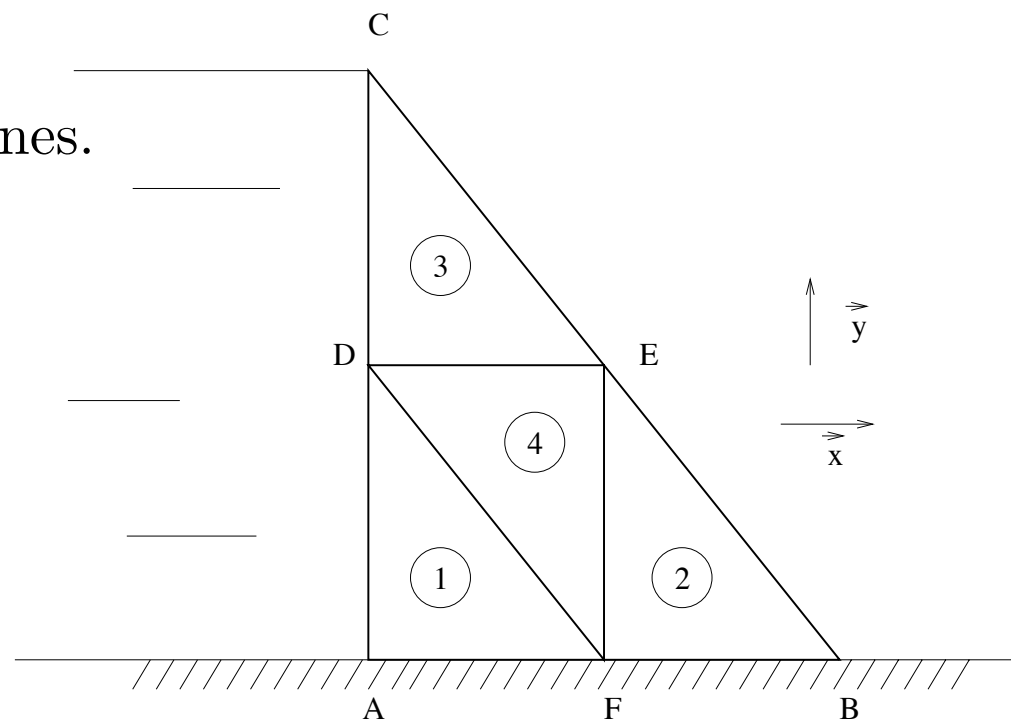
A faire avec Ansys

Nous considérons un barrage dont la section est un triangle rectangle de base $2a$, de hauteur $2h$.

On travaille en déformations planes.

$h=10$ m

$a=10$ m





Élément sur la convergence au maillage



3 méthodes :

Méthode r : Pour un maillage et un type d'élément donné, il s'agit de déplacer les nœuds, en fonctions des indicateurs d'erreur.

Méthode h : En conservant le même type d'élément, on les subdivise dans les zones les plus sollicitées selon le ou les indicateurs d'erreur choisis.

Méthode p : À nombre d'éléments constant, dans les zones les plus sollicitées, on va modifier les éléments en introduisant des fonctions de formes polynomiales d'ordre plus élevé, dites hiérarchiques.