L2 Mathématiques | Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 | Année universitaire 2021-2022

Examen session
Jeudi 30 juin 2022

Durée : 3h

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.
Si vous utilisez un résultat du cours, énoncez et vérifiez toutes ses hypothèses.

Exercice 1 (4 points) (a) Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2}.$$

(b) On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$, et on fixe $a \in [1, +\infty[$. Calculer $||f_n||_{[0,a]}$, puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(x)dx$.

Exercice 2 (7 points) On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On note f sa fonction somme.

1. Montrer que cette série :
   (a) ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$,
   (b) converge normalement sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   (c) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
   (*Toute réponse non justifiée sera considérée comme non valide*)
3. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$, l'exprimer à l'aide d'une série numérique, puis montrer que
$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq c\frac{\pi}{2}$$
   où $c := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 3 (5 points)

1. Déterminer le rayon de convergence et le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence des séries entières
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} x^{3n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n}) x^{n+1}.$$
On note f la fonction somme de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n}) x^{n+1}$.
2. Écrire le développement en série entière au voisinage de 0, $\sum a_n x^n$, de la fonction $g \colon x \mapsto f(x) + x \ln(1-x)$, puis montrer que g peut être prolongée au point $x = 1$.
3. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Exercice 4 (5 points) Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, impaire, et telle que $f(t) = (\pi - t)/2$ pour tout $0 < t < \pi$.

1. Calculer $S(f)(t)$, la série de Fourier de f au point t.
2. Montrer les identités
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\ , \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
3. Déterminer la nature (simple, uniforme, normale) de la convergence de $S(f)$ au voisinage de $t = 0$.