L2 Mathématiques **Université de Montpellier**
HAX403X Analyse 4 **Année universitaire 2021-2022**

Corrigé de l'examen de session 1
Vendredi 20 mai 2022

Durée : 3h

Exercice 1 (5 points) *On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par*

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp\left(\frac{2-nx^3}{1+\sqrt{n}x}\right).$$

On note $||f_n|| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

1. *Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$, $a > 0$.*

   Pour tout $a > 0$ et $x \in [a,1]$ on a

   $$|f_n(x)| \leq \exp\left(2-nx^3\right) \leq \exp\left(2-na^3\right)$$

   donc $||f_n|| \leq \exp(2-na^3)$. Alors $\lim_{n\to+\infty} ||f_n|| = 0$, ce qui montre que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,1]$.

2. *Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

   On vérifie immédiatement que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur tout l'intervalle $[0,1]$. Puisque la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,1]$ avec $a > 0$, il suffit de trouver une suite (x_n) de $[0,1]$ qui converge vers 0 et telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ n'existe pas ou est $\neq 0$. Comme le terme exponentiel est ce qui écrase f_n hors de 0, il suffit de choisir (x_n) telle que la suite (nx_n^3) est bornée, et la suite (nx^2) ne tend pas vers un multiple de π. On peut prendre par exemple $x_n = n^{-1/2}$, ou $x_n = n^{-1/3}$; dans ce dernier cas on a

   $$\begin{aligned} f_n(n^{-1/3}) &= \sin(n^{1/3})\exp(1/(1+n^{-1/6})) \\ &\sim \sin(n^{1/3}),\ n\to+\infty, \end{aligned}$$

   or on sait que la suite $(\sin(n^{1/3}))_n$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ n'existe pas, ce qu'il suffisait de démontrer.

3. *Montrer que la suite $(||f_n||)_n$ est bornée.*

   C'est évident : $||f_n|| \leq e^2$ par exemple (voir la majoration de la question 1).

4. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

   On découpe l'intervalle $[0,1]$ en $[0,\varepsilon]$ et $[\varepsilon,1]$, où $0<\varepsilon<1$ est quelconque. On a
$$\begin{aligned}|\int_0^1 f_n(x)dx| &\le \int_0^1 |f_n(x)|dx\\ &\le \int_0^\varepsilon |f_n(x)|dx + \int_\varepsilon^1 |f_n(x)|dx\\ &\le ||f_n||.\varepsilon + \int_\varepsilon^1 |f_n(x)|dx.\end{aligned}$$
   Dans la dernière inégalité on a utilisé l'inégalité de la moyenne. Comme la convergence de (f_n) est uniforme sur $[\varepsilon,1]$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\varepsilon^1 |f_n(x)|dx = \int_\varepsilon^1 \lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|dx = 0.$$
   Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge N$ implique $\int_\varepsilon^1|f_n(x)|dx \le \varepsilon$, soit encore $|\int_0^1 f_n(x)dx| \le (||f_n||+1)\varepsilon$. Puisque $0<\varepsilon<1$ est quelconque et $(||f_n||)_n$ est bornée, cela montre que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Exercice 2 (7 points) *Cet exercice est en deux parties indépendantes.*

Partie I. **(2,5 points)** *Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=|x|$ si $|x|\le\pi$. En déduire que*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

La fonction f est continue et paire, donc ses coefficients de Fourier $b_n(f)$, $n\ge1$, sont nuls, et $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx$, $n\ge0$. On a $a_0(f)=\pi$, et avec une intégration par partie on obtient $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet nous donne
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}, x\in[-\pi,\pi],$$
où le membre de droite est la série de Fourier de f. L'identité demandée vient en prenant $x=0$.

Partie II. Soient $(b_n)_{n\ge1}$ une suite réelle et α un réel, $\alpha\ge3$, tels que
$$b_n=o(1/n^\alpha)\ ,\ n\to+\infty.$$

1. *Démontrer que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n=1}^\infty b_n\sin(nx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

   Le sup de $|b_n\sin(nx)|$ sur $\mathbb{R}$ est b_n, qui est un $o(n^{-2})$ par hypothèse. Donc par comparaison avec la série convergente $\sum 1/n^2$, la série de fonctions $\sum_{n=1}^\infty b_n\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Même chose pour la série dérivée. D'après le théorème de dérivation pour les séries de fonctions (il faut l'énoncer !), cela implique que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. *À l'aide de résultats vus en cours (et que l'on énoncera précisément) :*
   (a) *justifier sans calculs que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \tag{1}$$

   La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (question précédente), donc d'après le cours (précisément, la Proposition 5.4.3) c'est la série de Fourier de sa somme, f. Or les coefficients $b_n(f)$ sont définis par l'égalité (1).

   (b) *justifier l'inégalité :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx.$$

   Les fonctions f et f' sont continues 2π-périodiques, on peut donc leur appliquer le théorème de Parseval : $||f||_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$, et $||f'||_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |nb_n|^2$ (on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx)$). Donc $||f||_2 \leq ||f'||_2$, ce qui implique l'inégalité (par définition de la norme $||.||_2$).

3. *Calculer les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$ pour tous $m, n \geq 1$ entiers, et en déduire une autre preuve de l'égalité* (1).

   D'abord on linéarise (fait en TD !!) :

$$\sin(mx) \sin(nx) = \tfrac{1}{2}(\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t),$$

   donc $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0$ si $m \neq n$, et $= \pi$ si $m = n$. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ converge uniformément on peut intervertir intégration et somme : $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = b_n$.

Exercice 3 (8 points) *On note le sinus hyperbolique* $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer le développement en série entière de* sinh *au voisinage de* 0 *et son rayon de convergence.*

   On sait que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2k+1)!}$. Le rayon de convergence est $+\infty$ (règle de D'Alembert).

2. *Montrer que la fonction $f \colon x \mapsto \frac{x}{\sinh(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et développable en série entière au voisinage de* 0.

   La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ (comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur étant nul en $x = 0$ seulement), et le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 est (NB : un simple équivalent suffit)

$$DL(f, 3) = \frac{x}{x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3).$$

   Donc f est définie et continue en 1, et $f(1) = 1$. D'après le cours, l'inverse d'une fonction développable en série entière en 0 et non nulle au voisinage de 0 est développable en série entière au voisinage de 0. C'est le cas de f, d'après ce qu'on vient de voir.

3. *Notons $\sum a_n x^n$ le développement en série entière de f en 0. Déduire des propriétés de parité de f que $a_{2n+1} = 0$ pour tout entier naturel n.*

   La fonction f est paire, et nous savons que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (NB : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 puisque développable en série entière). En dérivant n fois la relation $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(0)$, donc $f^{(n)}(0) = 0$ si n est impair.

   Dans la suite de l'exercice on n'utilisera plus ce développement en série entière.

4. **(2 points pour cette question)** *Déterminer le domaine de $\mathbb{R}$ sur lequel la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$ converge simplement, et les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels elle converge normalement.*

   Le terme générale $f_n(x) = xe^{-(2n+1)x}$ ne tend vers 0 que si $x \geq 0$, il est nul en 0, et si $x > 0$ c'est un $o(n^{-2})$. Donc la série diverge grossièrement pour $x < 0$, et par comparaison de séries à termes généraux positifs, elle converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   Pour la convergence normale, on peut calculer $||f_n||_{[a,+\infty[}$ pour tout $a \geq 0$. On a $f'(x) = e^{-(2n+1)x}(1 - (2n+1)x)$, donc (tableau de variation) f est croissante sur $[0, \frac{1}{2n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2n+1}, +\infty[$. Si $a > 0$, pour tout n assez grand (tel que $\frac{1}{2n+1} < a$) on a donc $||f_n||_{[a,+\infty[} \leq f_n(a)$; comme $f_n(a) = o(n^{-2})$ (par croissances comparées), on obtient que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Si $a = 0$, $||f_n||_{[0,+\infty[} = f_n(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{e(2n+1)}$, donc la série ne converge pas normalement sur tout intervalle qui contient 0 dans son adhérence. En conclusion, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la série converge normalement sont de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$.

5. **(2 points pour cette question)** *Exprimer la somme de cette série en fonction de f, puis pour tous $0 < a < b$, exprimer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme une série numérique.*

   Pour tout $x > 0$ on a

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x} = xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{2} f(x).$$

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. L'intégrale est bien définie car f est continue sur $[0, +\infty[$. D'après la question précédente, la série converge normalement sur le segment $[a, b]$. Par le théorème d'interversion pour les intégrales de séries de fonctions, on déduit

   $$\int_a^b f(x)dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b xe^{-(2n+1)x} dx.$$

   Une intégration par parties donne

   $$\int_a^b xe^{-(2n+1)x} dx = -\frac{be^{-(2n+1)b}}{2n+1} + \frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2} - \frac{e^{-(2n+1)b}}{(2n+1)^2}.$$

   Donc

   $$\int_a^b f(x)dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{be^{-(2n+1)b}}{2n+1} + \frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2} - \frac{e^{-(2n+1)b}}{(2n+1)^2} \right).$$

6. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
On pourra utiliser l'identité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$*, démontrée à l'exercice 2.*

On a $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to 0} \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Ces deux intégrales sont bien définies car f est continue sur $[0;+\infty[$, et intégrable car $f(x) = o(x^{-2})$, $x \to +\infty$. Pour calculer ces limites, on utilise le théorème d'interversion limite/somme pour les séries uniformément convergentes. C'est possible, car les séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{xe^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}$ convergent normalement sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$; c'est clair pour la seconde, et pour la première on utilise $||\frac{xe^{-(2n+1)x}}{2n+1}||_{[0,+\infty[} = \frac{1}{e(2n+1)^2}$ (même méthode qu'à la question 4). Donc

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(2\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b xe^{-(2n+1)x}dx \right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{be^{-(2n+1)b}}{2n+1} + \frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2} - \frac{e^{-(2n+1)b}}{(2n+1)^2} \right) \right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{be^{-(2n+1)b}}{2n+1} + \frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2} - \frac{e^{-(2n+1)b}}{(2n+1)^2} \right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to 0} \int_a^{+\infty} f(x)dx &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{a\to 0} \left(\frac{ae^{-(2n+1)a}}{2n+1} + \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2} \right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Avec l'identité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, on en déduit $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi^2}{4}$.