L2 Mathématiques **Université de Montpellier**
HAX403X Analyse 4 **Année universitaire 2021-2022**

Examen session 1
Vendredi 20 mai 2022

Durée : 3h

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.
Si vous utilisez un résultat du cours, énoncez et vérifiez toutes ses hypothèses.

Exercice 1 (5 points) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp\left(\frac{2-nx^3}{1+\sqrt{n}x}\right).$$

On note $||f_n|| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$, $a > 0$.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
3. Montrer que la suite $(||f_n||)_n$ est bornée.
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 2 (7 points) Cet exercice est en deux parties indépendantes.

Partie I. **(2,5 points)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ si $|x| \leq \pi$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Partie II. Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et α un réel, $\alpha \geq 3$, tels que

$$b_n = o(1/n^\alpha)\ ,\ n \to +\infty.$$

1. Démontrer que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide de résultats vus en cours (et que l'on énoncera précisément) :
   (a) justifier sans calculs que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \qquad (1)$$

(b) justifier l'inégalité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx.$$

3. Calculer les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$ pour tous $m, n \geq 1$ entiers, et en déduire une autre preuve de l'égalité (1).

Exercice 3 (8 points) On note le sinus hyperbolique $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le développement en série entière de sinh au voisinage de 0, et son rayon de convergence.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sinh(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et développable en série entière au voisinage de 0.
3. Notons $\sum a_n x^n$ le développement en série entière de f en 0. Déduire des propriétés de parité de f que $a_{2n+1} = 0$ pour tout entier naturel n.

   Dans la suite de l'exercice on n'utilisera plus ce développement en série entière.
4. **(2 points pour cette question)** Déterminer le domaine de $\mathbb{R}$ sur lequel la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-(2n+1)x}$ converge simplement, et les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels elle converge normalement.
5. **(2 points pour cette question)** Exprimer la somme de cette série en fonction de f, puis pour tous $0 < a < b$, exprimer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme une série numérique.
6. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
   On pourra utiliser l'identité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, démontrée à l'exercice 2.