UNIVERSITE MONTPELLIER II – UFR DES SCIENCES

Contrôle continu

Nom - Prénom : ....

N° Etudiant : ....

UNITÉ D'ENSEIGNEMENT : ....

MODULE : ....

DATE : ....

ÉPREUVE : ....

CODE : ....

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE /

Cadre réservé au correcteur

Ex1

1- les courbes caractéristiques sont définies par

$t \longmapsto X(t)$ tq $\begin{cases} \dot{X}(t) = X(t) \\ X(0) = x \end{cases}$

2

c'est à dire $X(t) = x e^{t}$

ce sont des exponentielles

2- Soit $t \longmapsto u(X(t), t) = v(t)$

où u désigne une solution de l'EDP (1)

$\dot{v}(t) = u_t + u_x \cdot \dot{X}(t)$ (dérivation composée)

$= u_t(\cancel{X}(t), t) + u_x(X(t), t) \cdot X(t)$

Or u vérifie $u_t(x,t) + x\, u_x(x,t) = 0$

donc pour $x = X(t)$ on obtient

1

$\dot{v}(t) = 0 \iff v(t) = \text{const}.$

donc $v(t) = v(0) = u(X(0), 0)$

$= u(x, 0)$

$v(t) = f(x)$ avec la condition initiale.

On obtient donc $u(X(t), t) = f(x)$

0.5 donc $u(xe^{t}, t) = f(x)$

Ainsi $u(x, t) = f(xe^{-t})$

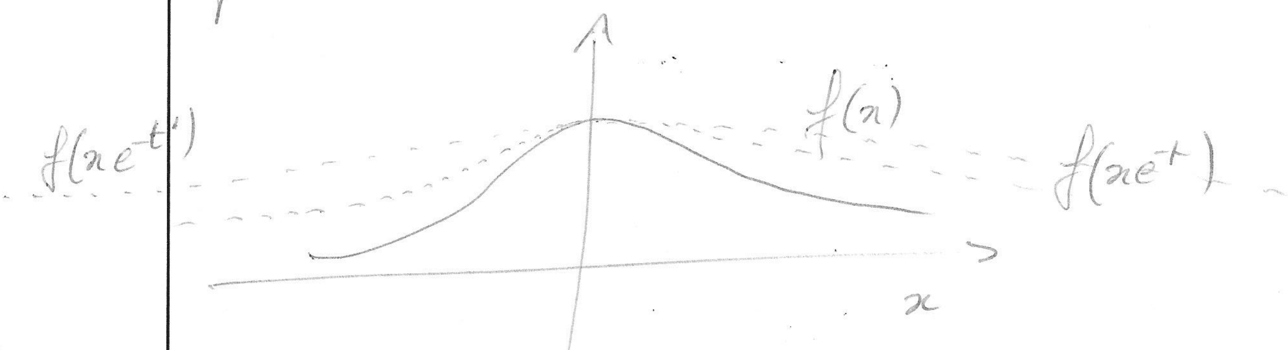
en remplaçant x par xe^{-t}.

0.5 Les solutions de (1) sont donc

$$\boxed{u(x,t) = f(xe^{-t})} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Bonus) (3) quand $t \to +\infty$ $xe^{-t} \to 0$ $\forall x$

donc $u(x,t) \xrightarrow[t \to \infty]{} f(0)$ car f est régulière donc continue.



graphiquement la courbe $f(xe^{-t})$ s'obtient en changeant d'unité sur l'axe des x avec un facteur $e^{t} > 1$ donc la courbe s'aplatit.

Ex2

1) Soit $u(x_j,t_n)$ la solution exacte.
portons là dans le schéma :

$$u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1}) + \frac{c\delta t}{\delta x}\left(u(x_{j+1},t_n)-u(x_{j-1},t_n)\right)$$

$$= \cancel{u(x_j,t_n)} + \delta t\, u_t + \cancel{\frac{\delta t^2}{2} u_{tt}} + O(\delta t^3)$$
$$- \left(\cancel{u(x_j,t_n)} - \delta t\, u_t + \cancel{\frac{\delta t^2}{2} u_{tt}} + O(\delta t^3)\right)$$
$$+ \frac{c\delta t}{\delta x}\left\{\cancel{u(x_j,t_n)} + \delta x\, u_x + \cancel{\frac{\delta x^2}{2} u_{xx}} + O(\delta x^3) - \left(\cancel{u(x_j,t_n)} - \delta x\, u_x + \cancel{\frac{\delta x^2}{2} u_{xx}} + O(\delta x^3)\right)\right\}$$

$$= 2\delta t\, u_t + O(\delta t^3)$$
$$+ \frac{c\delta t}{\delta x}\left\{2\delta x\, u_x + O(\delta x^3)\right\}$$

$$= 2\delta t\, u_t + 2c\,\delta t\, u_x + O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2)$$
$$= 2\delta t(u_t + c u_x) + O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2)$$

or u solution donc $u_t + c u_x = 0$

Il reste

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2)$$

2

2) portons $u_j^n = G(k)^n u_j^0$ dans le schéma

$$G(k)^{n+1} u_j^0 = G(k)^{n-1} u_j^0 - \frac{c\delta t}{\delta x}\left(G(k)^n u_{j+1}^0 - G(k)^n u_{j-1}^0\right)$$

on cherche $G(k) \neq 0$ - Simplifions par $G(k)^{n-1}$

$$G(k)^2 u_j^0 = -\frac{c\delta t}{\delta x} G(k)\left(u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0\right) + u_j^0$$

$$u_j^0 = e^{ijk\delta x} \qquad u_{j+1}^0 = e^{i(j+1)k\delta x}$$

$$u_{j-1}^0 = e^{i(j-1)k\delta x}$$

En simplifiant par $e^{ijk\delta x}$, il reste

$$G(k)^2 = -\frac{c\delta t}{\delta x}\left(e^{ik\delta x} - e^{-ik\delta x}\right)G(k) \cancel{+}\ 1$$

$$G(k)^2 + 2i\frac{c\delta t}{\delta x}\sin(k\delta x)\, G(k) \cancel{=}\ 1 = 0$$

2

$G(k)$ est racine de l'équation du second degré

$$z^2 + 2i\frac{c\delta t}{\delta x}(\sin(k\delta x))\, z \cancel{=}\ 1 = 0$$

---

3) ~~les racines de ce binôme sont~~

$$-\frac{ic\delta t}{\delta x}\sin(k\delta x) \pm \sqrt{1 - \frac{c^2\delta t^2}{\delta x^2}\sin^2(k\delta x)}$$

~~racine carrée (éventuellement complexe)~~

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

☐ LICENCE * (L) ☐ MASTER * (M)

MENTION : ....

Parcours : ....

U. E. : ....

N° de la Salle de Cours

SUJET DE M. : ....

ou de l'Amphi : ....

SESSION* : 1 - ☐ 2 - ☐

Date de l'épreuve : ....

N° D'ANONYMAT : ☐☐☐☐☐☐

(INDISPENSABLE)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

* Cocher la case utile

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE /

Cadre réservé au correcteur

3) les racines du trinôme sont

$$-i\frac{c\delta t}{\delta x}\sin(k\delta x) \pm \sqrt{1-\frac{c^2\delta t^2}{\delta x^2}\sin^2(k\delta x)}$$

posons $\boxed{r = \frac{c.\delta t}{\delta x}}$ et $\boxed{\theta = k\,\delta x}$

1 $G(k) = -ir\sin\theta \pm \sqrt{1-r^2\sin^2\theta}$

la racine carrée était éventuellement complexe si $r^2\sin^2\theta > 1$.

Supposons maintenant $|r| \leq 1$

$1-r^2\sin^2\theta \geq 1-r^2 \geq 0$ donc on peut calculer exactement

1 $|G(k)| = \sqrt{(1-r^2\sin^2\theta)+r^2\sin^2\theta} = 1$

<u>Le schéma est donc stable, si $\left|\frac{c\delta t}{\delta x}\right| \leq 1$.</u>

Bonus

4) si $\left|\frac{c\delta t}{\delta x}\right| > 1$ alors pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, sinθ

pour $k_* = \frac{\pi}{2\delta x}$ on calcule

$\cancel{G(k) = \pm i}$

$$G(k_*) = \pm i\sqrt{\frac{c^2\delta t^2}{\delta x^2} - 1} - i\frac{c\delta t}{\delta x}$$

on distingue alors 2 cas selon que $c > 0$ ou non :

si $c > 0$

$$\left|-i\sqrt{\frac{c^2\delta t}{\delta x^2} - 1} - i\frac{c\delta t}{\delta x}\right|$$

$$= \sqrt{r^2 - 1} + r$$

$$= \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{r^2}$$

or $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

donc $\sqrt{r^2-1} + r \geq \sqrt{2r^2-1} > \sqrt{2-1} = 1$

le schéma est instable car $G(k_*)$ peut avoir un module > 1.

le cas $c < 0$ est analogue

on prend alors $|G(k_*)| = \sqrt{r^2-1} - r$

$$= \sqrt{r^2-1} + |r|$$

$$= \sqrt{r^2-1} + \sqrt{r^2}$$

$$\geq \sqrt{2r^2-1} > 1.$$

le schéma est instable aussi