



Session : contrôle continu 2

Date : 26/04/2022

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, MSM

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 1h10

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + x u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (1)$$

- (2pts) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (1).
- (2pts) En déduire les solutions de (1).
- (Bonus hors-barème.) On suppose f régulière. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$.

Exercice 2. (6 pts) Soit c une constante réelle. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + c u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2)$$

Soit un pas de temps δt et un pas d'espace δx . On définit $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. On note u_j^n une valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma numérique suivant, appelé schéma saute-mouton :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c\delta t}{\delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

- (2pts) Montrer que l'erreur de consistance du schéma saute-mouton est $\mathcal{O}(\delta t^3 + \delta t \cdot \delta x^2)$.
- (2pts) Soit $k \in \mathbb{R}$ et la donnée initiale $u(x, 0) = \exp(ikx)$.
En supposant $u_j^n = (G(k))^n u_j^0$, trouver une équation du second degré vérifiée par le facteur d'amplification $G(k)$, supposé non nul.
- (2pt) Calculer les valeurs possibles de $G(k)$ et en déduire que le schéma saute-mouton est stable si

$$\left| \frac{c\delta t}{\delta x} \right| \leq 1.$$

- (Bonus hors-barème.) Montrer que le schéma est instable si

$$\left| \frac{c\delta t}{\delta x} \right| > 1.$$