L2 Mathématiques — Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 — Année universitaire 2021-2022

Contrôle continu 2
Mercredi 20 avril 2022

Durée : 1h15

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.
Si vous utilisez un résultat du cours, énoncez
et vérifiez toutes ses hypothèses.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. **(2 points)** Soient f_n, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Démontrer que si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément.
2. **(2 points)** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Montrer que si la suite (a_n) est bornée, alors le rayon de convergence de la série est ≥ 1.
3. **(1 point)** Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière et telle que $f(0) = 0$. À l'aide d'un résultat du cours, justifier l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, ou $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \varepsilon[$.

Exercice 2 (9 points) On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{\sqrt{n} + x^2}.$$

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.
   On note f sa somme.
3. En considérant le reste de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, démontrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3 (2 points) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Exercice 4 (4 points) Déterminer l'intervalle de convergence et calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + (-3)^n) x^n.$$