Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques

Année Universitaire 2021-2022

TP noté

Déposer vos fichiers (2 au maximum) sur moodle, section TP, dans l'espace de dépôt TP noté.

Ecrire une fonction Matlab ou Octave qui calcule la solution $u(x,t)$ de l'EDP

$$u_t + cu_x - du_{xx} = 0$$

avec la donnée initiale $u(x,0) = \sin x$ sur le segment $x_{min} \le x \le x_{max}$ pour $0 \le t \le T$.

```
function u = convecdiff(c, d, T, xmin, xmax, dx, dt)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%ce script résout l'équation de convection-diffusion
% u_t + c u_x - d u_xx = 0
% u(x,0) = sin(x)
% sur  xmin<x<xmax, 0<t<T
% avec la méthode des différences finies
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% maillage
x=(xmin:dx:xmax);
N= length(x);
t=(0:dt:T);
% ...A COMPLETER...
```

La fonction `convecdiff` retourne une matrice `u = u(j,n)` où $u(j,n)$ est censée approcher $u(x_j,t_n)$. La grille de points (x_j,t_n) est obtenue en discrétisant le rectangle $(x_{min},x_{max}) \times (0,T)$ avec un pas d'espace δx et un pas de temps δt.
Les réels c et d sont supposés strictement positifs. On note

$$r = \frac{d \cdot \delta t}{\delta x^2}, \quad s = \frac{c \cdot \delta t}{\delta x}.$$

Coder le schéma *explicite* suivant :

$$u_j^{n+1} = (r+s)\, u_{j-1}^n + (1-2r-s)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n.$$

Pour gérer les indices $j = 1$ qui correspond x_{min} et $j = N$ qui correspond à x_{max}, vous prendrez des *conditions limites périodiques* au cours des itérations : lorsque $v = (v(1), v(2), \dots v(N))$ est un vecteur de dimension N, on convient que $v(0) = v(N)$. De même on convient que $v(N+1) = v(1)$.

Comme la condition initiale est la fonction $\sin(x)$, la solution exacte est : $u(x,t) = \exp(-dt)\sin(x-ct)$. La fonction tracera sur une même figure les 3 courbes : $x \mapsto u(x,0)$, $x \mapsto u(x,T)$ et la solution exacte à l'instant $t = T$, $x \mapsto \exp(-dT)\sin(x-cT)$.

Testez votre fonction avec les paramètres $c = 2$, $d = 0.1$, $T = 0.6$, $x_{min} = -\pi$, $x_{max} = \pi$, le pas d'espace $dx = 0.1$, et le pas de temps $dt = 0.025$. Puis reprenez les mêmes paramètres en *augmentant légèrement* le pas de temps $dt = 0.03$. Que constatez-vous ? Expliquez. (*Ecrire la réponse en commentaire dans votre fichier.*)

(BONUS hors-barème) Refaire le même travail avec le schéma semi-implicite suivant

$$-r\, u_{j-1}^{n+1} + (1+2r)\, u_j^{n+1} - r\, u_{j+1}^{n+1} = s\, u_{j-1}^n + (1-s)\, u_j^n.$$