TD6

Ex 1. 1. $u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{\mu \delta t}{\delta x^2}\left\{ u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n \right\}$

$$u_j^{n+1} = \frac{\mu\delta t}{\delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2\mu\delta t}{\delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\mu \delta t}{\delta x^2} u_{j+1}^n$$

$$u_j^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1-2r)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n \qquad \square$$

2- Pour déterminer l'erreur de consistance on utilise le fait que (différences finies) :

$$\frac{u(x_j, t_n+\delta t) - u(x_j, t_n)}{\delta t} = u_t(x_j, t_n) + O(\delta t)$$

$$\frac{u(x_j - \delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j+\delta x, t_n)}{\delta x^2} = u_{xx}(x_j, t_n) + O(\delta x^2)$$

Donc l'erreur de consistance du schéma

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_n+\delta t) - u(x_j, t_n) - \frac{\mu \delta t}{\delta x^2}\Big(u(x_j - \delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j+\delta x, t_n)\Big)$$

$$= \delta t \cdot u_t(x_j, t_n) + O(\delta t^2) - \mu \delta t\, u_{xx}(x_j, t_n) + O(\delta t \cdot \delta x^2)$$

Comme $u_t = \mu u_{xx}$ il reste :

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta t \cdot \delta x^2) \qquad \square$$
$$= O(\delta t\,(\delta t + \delta x^2))$$

3- On procède de même pour le schéma de Crank-Nicolson.

On va cependant utiliser une différence finie centrée en $x_j, t_n + \frac{\delta t}{2}$ plus précise :

$$(1)\quad \frac{u(x_j, t_n+\delta t) - u(x_j, t_n)}{\delta t} = u_t\left(x_j, t_n + \frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2)$$

$$(2)\quad \frac{u(x_j - \delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j+\delta x, t_n)}{\delta x^2} = u_{xx}(x_j, t_n) + O(\delta x^2)$$

$$(3)\quad \frac{u(x_j - \delta x, t_n+\delta t) - 2u(x_j, t_n+\delta t) + u(x_j+\delta x, t_n+\delta t)}{\delta x^2} = u_{xx}(x_j, t_n+\delta t) + O(\delta x^2)$$

Or pour une fonction φ C^2, on a toujours :

$$\frac{\varphi(t) + \varphi(t+\delta t)}{2} = \varphi\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2)$$

(il suffit de développer $\varphi(t) = \varphi\left(t+\frac{\delta t}{2}\right) - \frac{\delta t}{2}\varphi'\left(t+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2)$

$\varphi(t+\delta t) = \varphi\left(t+\frac{\delta t}{2}\right) + \frac{\delta t}{2}\varphi'\left(t+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2)$)

Donc en faisant la moyenne de (2) et (3) :

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j+1}, t_n)}{\delta x^2} + \frac{u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j+1}, t_{n+1})}{\delta x^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{u_{xx}(x_j, t_n) + u_{xx}(x_j, t_n+\delta t)\right\} + O(\delta x^2)$$

$$= u_{xx}\left(x_j, t_n + \frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^2) + O(\delta x^2)$$

On obtient alors l'erreur de consistance $\varepsilon(\delta t, \delta x)$

$$= u(x_j, t_n+\delta t) - u(x_j, t_n) - \frac{\delta t}{2}\left\{\frac{u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j+1}, t_n)}{\delta x^2} + \frac{u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j+1}, t_{n+1})}{\delta x^2}\right\}$$

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = \delta t\, u_t\left(x_j, t_n+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^3)$$

$$-\delta t\, \mu\, u_{xx}\left(x_j, t_n+\frac{\delta t}{2}\right) + O(\delta t^3) + O(\delta t\, \delta x^2)$$

Comme $u_t = \mu u_{xx}$ il reste

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = O(\delta t^3) + O(\delta t\,\delta x^2)$$

$$= O\left(\delta t\left(\delta t^2 + \delta x^2\right)\right) \qquad \square$$

4- calculons le facteur d'amplification :

prenons $u_j^0 = \exp(ikx_j)$

cherchons u_j^1 sous la forme $G(k)\, u_j^0$

portons l'expression dans le schéma :

$$-r\, G(k) \exp(ik(j-1)\delta x) + (1+2r)\, G(k) \exp(ikj\delta x)$$

$$-r\, G(k) \exp(ik(j+1)\delta x) = r \exp(ik(j-1)\delta x) +$$

$$(1-2r) \exp(ikj\delta x) + r \exp(ik(j+1)\delta x)$$

simplifions par $\exp(ikj\delta x)$ et factorisons $G(k)$

$$G(k)\left\{-r e^{-ik\delta x} + (1+2r) - r e^{ik\delta x}\right\} = r e^{-ik\delta x} + (1-2r) + r e^{ik\delta x}$$

posons $\theta = k\delta x$.

$$G(k) = \frac{1-2r+2r\cos\theta}{1+2r-2r\cos\theta} = \frac{1-4r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+4r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donc $G(k) \in \mathbb{R}$ et $-1 \leq G(k) \leq 1$

le schéma est inconditionnellement stable $\square$

Ex 2

1- $u(x,t) = \sum c_m(t)\, e^{imx}$

on développe en série de Fourier la fonction périodique $x \mapsto u(x,t)$ à chaque instant t

$$u_t = \sum_n \dot{c}_m(t)\, e^{inx}$$ (sous réserve de convergence)

De m

$$u_x = \sum_m c_m(t)\, im\, e^{imx}$$

$$u_{xx} = \sum c_m(t)\, (im)^2 e^{inx}$$

$$= - \sum_n c_m(t)\, m^2\, e^{imx}$$

Puisque $u_t = \mu u_{xx}$ on doit avoir

$$\sum_m \dot{c}_m(t)\, e^{imx} = \sum_m -\mu m^2 c_m(t)\, e^{imx}$$

or $\{e^{imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2[0,2\pi]$

donc on peut identifier terme à terme :

$$\dot{c}_m(t) = -\mu m^2 c_m(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Donc $c_m(t) = e^{-\mu m^2 t}\, c_m(0)$

On trouve $c_m(0)$ grâce à la donnée initiale.

$$u(x,0) = \sum_n c_n(0) e^{inx} = f(x)$$

et on connaît le développement de Fourier de f

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Donc en identifiant les coefficients de Fourier :

$$c_n(0) = \hat{f}(n).$$

Ainsi on a trouvé l'expression de

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$$

(A ce stade les calculs sont formels)

2. Lorsque $t \to +\infty$ $\quad e^{-\mu n^2 t} \longrightarrow 0 \quad \forall n \neq 0$

donc si on admet qu'on peut passer à la limite dans la série :

$$u(x,t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

la température converge vers une température moyenne égale à la moyenne de la température initiale. C'est le phénomène de <u>diffusion thermique</u>.

On peut justifier rigoureusement ce passage à la limite comme suit.

d'abord on montre que $|\hat{f}(n)|$ est bornée.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} 1^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|f\|_{L^2} = M < +\infty$$ car $f \in L^2(0,2\pi)$ par hypothèse.

Ensuite on majore

$$u(x,t) - \hat{f}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \hat{f}(n)\, e^{-\mu n^2 t}\, e^{inx}$$

$$|u(x,t) - \hat{f}(0)| \leq \sum_{|n|\geq 1} M\, e^{-\mu n^2 t}$$

$$|u(x,t) - \hat{f}(0)| \leq 2M\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n^2 t} \leq 2M\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n t}$$

et on est ramené à une série géométrique :

$$|u(x,t) - \hat{f}(0)| \leq 2M\, e^{-\mu t}\left(\frac{1}{1-e^{-\mu t}}\right)$$

pour t assez grand $\left(t > \frac{\ln 2}{\mu}\right)$ $\quad \frac{1}{1-e^{-\mu t}} \leq 2.$

donc $|u(x,t) - \hat{f}(0)| \leq 4M\, e^{-\mu t}$; pour $t > \frac{\ln 2}{\mu}$

donc $u(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \hat{f}(0)$ (et la convergence est uniforme par rapport à x)

3- Il est facile de prouver que la série
$\sum \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$ converge $\forall t>0, \forall x \in [0,2\pi]$

On va montrer qu'elle converge <u>normalement</u> sur $(x,t) \in [0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$, pour tout $\tau > 0$.

En effet on peut majorer uniformément le terme général de la série :

$$\left|\hat{f}(n)\, e^{-\mu n^2 t} e^{inx}\right| \leq |\hat{f}(n)|\, e^{-\mu n^2 \tau} \leq M e^{-\mu |n| \tau}$$

et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\mu |n| \tau}$ est une série géométrique convergente.

On a donc $\sum_n \left\|\hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}\right\|_\infty < \infty$

la série converge normalement sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$

Comme $\tau > 0$ peut être choisi arbitrairement proche de 0, la série converge $\forall t>0, \forall x \in [0,2\pi]$

Rq : On n'a pas évidemment de convergence normale sur $[0,2\pi] \times]0,+\infty[$. D'ailleurs, pour $t=0$, la série $\sum_n \hat{f}(n) e^{inx}$ converge seulement dans $L^2(0,2\pi)$ vers $u(x,0) = f(x)$.

En tous cas pour $t>0$ la convergence est tellement "bonne" que la série obtenue

$$\sum \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx} = u(x,t)$$

donne une fonction C^∞, ainsi qu'on peut le prouver en montrant la convergence normale des séries dérivées sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$, pour $\tau > 0$ fixé.

Pour cela il suffit de majorer terme à terme : Montrons par exemple que u C^1. Pour cela il faut prouver u_t et u_x continues.

Montrons le pour u_x (le cas u_t est analogue)

Pour cela on considère la série dérivée

$$\sum in \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$$

et on montre qu'elle converge normalement sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$

le terme général est borné par

$$|n| M e^{-\mu n^2 \tau} \leq \frac{c}{n^2}$$ par croissance comparée

donc la série converge normalement donc on peut effectivement dériver terme à terme

$$u_x = \sum_n in \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} e^{inx}$$

et la convergence normale implique la convergence uniforme donc u_x est continue sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$. Ceci est valable pour $\tau > 0$ arbitraire donc u_x est continue sur $[0,2\pi] \times]0, +\infty[$.

On traite de même u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, ...
grâce à l'exponentielle e^{-pm^2t} les séries convergent normalement sur $[0,2\pi] \times [\tau, +\infty[$.

et u est $C^\infty([0,2\pi] \times [\tau, +\infty[)$, comme $\tau > 0$ est arbitraire

$$u \in C^\infty([0,2\pi] \times]0, +\infty[)$$

La donnée initiale $f \in L^2(0,2\pi)$ peut être discontinue, dès que $t > 0$, $u(x,t)$ est C^∞. C'est l'effet <u>régularisant</u> de l'équation de la chaleur.

<u>Rq</u> cette propriété n'est pas du tout vérifiée pour l'équation de transport linéaire qui conserve la régularité de la donnée initiale, et donc transporte ses discontinuités éventuelles.
Pour les lois de conservation non linéaires, c'est encore pire : on peut avoir un profil initial C^∞ mais une discontinuité peut se développer au cours du temps,
(Cf exemple du trafic routier vu en amphi)