Exercice 77

Question préliminaire : montrer que $\frac{e^x-1}{x} > 0, \forall x \neq 0$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^x > 1 = e^0$ si et seulement si $x > 0$. Cela permet de voir que $\frac{e^x-1}{x} > 0, \forall x \neq 0$.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction F.

Le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ est $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)$. Le $DL_3(0)$ de $u \mapsto \ln(1+u)$ est $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. En faisant le changement de variable $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)$ dans le DL précédent on trouve, pour x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right)^3 + o(x^3) \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. Déduire de la question **1.** la limite de la suite

$$u_n = n\left(\ln(n) + \ln(e^{\frac{1}{n}} - 1)\right), \quad n \geq 1.$$

On remarque que $u_n = nF(\frac{1}{n}) = n\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o(\frac{1}{n^3})\right) = \frac{1}{2} + o(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

3. Montrer que lorsque $x \to +\infty$, on a le développement asymptotique

$$F(x) = x - \ln(x) - e^{-x} + o(e^{-x}).$$

Pour $x > 0$, on a $F(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(x) = \ln(e^x(1 - e^{-x})) - \ln(x) = x - \ln(x) + \ln(1 - e^{-x})$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et que le $DL_1(0)$ de $u \mapsto \ln(1-u)$ est $\ln(1-u) = -u + o(u)$, on obtient le développement asymptotique souhaité lorsque $x \to +\infty$: $F(x) = x - \ln(x) - e^{-x} + o(e^{-x})$.

3.4. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en $\ln(4)$ de la fonction F. *On utilisera le fait que* $\ln(4) \simeq 1,38$.

Un calcul direct donne pour $x > 0$

$$F'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad F''(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\ln(4) < \frac{3}{2}$, on remarque que $F''(\ln(4)) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{\ln(4)^2} > 0$. Cela montre qu'au voisinage du point $(\ln(4), F(\ln(4)))$ le graphe de la fonction F se trouve au dessus de sa tangente en $\ln(4)$.

Exercice 78

I. Etude de la fonction

(a) La fonction $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ n'est autre que la classique "tangente hyperbolique" : $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$. Pour $x > 0$, le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 de la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ est $f(x) = f(0) + (x - 0)f'(\theta)$, avec $\theta \in]0, x[$. On a donc $f(x) = x\dfrac{1}{\cosh^2 \theta}$.
Comme $\cosh t \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}$, on a la relation demandée : $\forall x > 0$, $0 < f(x) < x$.
(Les calculs sont rapides à faire si l'on a oublié les propriétés des fonctions hyperboliques.)

(b) Il s'agit d'un DL, similaire à celui de $\tan x$, facile à retrouver, et laissé en exercice. Voici une vérification avec Wolfram Alpha, ainsi qu'un graphe de la fonction f où l'on voit bien que $0 < f(x) < x$ pour $x > 0$: DL et graphe

(c) $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)^2 - 1\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(\left(\dfrac{1}{1 - x^2/3 + o(x^2)}\right)^2 - 1\right)$
$= \dfrac{1}{x^2}\left(\left(1 + x^2/3 + o(x^2)\right)^2 - 1\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(\left(1 + 2x^2/3 + o(x^2)\right) - 1\right) = \dfrac{2}{3} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$ (cf. 75-(d)).

(d) $f(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{+\infty}{=} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2x} + e^{-4x} + o(e^{-4x}))$
$= 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + o(e^{-4x})$ (où $u = e^{-2x}$ tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.).

II. Etude de la suite

(a) La fonction f étant strictement croissante (cf. I-(a)), la suite (u_n) est strictement monotone (cf. cours). Elle décroit car, toujours d'après I-(a), $u_1 := f(u_0) < u_0$ (cf. cours et TD, la récurrence est immédiate).
Elle est, de plus, minorée par 0, puisque $u_0 > 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > 0$ (la récurrence est évidente). Elle est donc convergente vers la solution de l'équation $f(l) = l$. Comme $f(0) = 0$ et $f(x) < x$ pour $x > 0$, la limite de (u_n) est $l = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{f(u_n)^2} - \dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{3}$, d'après I-(c) et en posant $x = u_n$.

(c) Posons $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. D'après le lemme ce Cesàro, on a $\lim w_n = \lim v_n = \frac{2}{3}$.

Mais, par télescopage, on a $w_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}\right)$.
Ainsi $\lim \dfrac{1}{nu_n^2} - \dfrac{1}{nu_0^2} = \lim \dfrac{1}{nu_n^2} = \dfrac{2}{3}$; ce qui donne $\lim \sqrt{n}u_n = \dfrac{3}{2}$, soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 87

On cherche à établir un développement asymptotique de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\quad n \geq 1$.

On pose $a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, pour tout $k \geq 1$.

(**1**) Montrer que $a_k = \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3})$.

On a $a_k = \frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3})$ (dans la dernière égalité, on a utilisé le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$).

(**2**) En déduire que la série $\sum a_k$ converge. On note $\gamma := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Comme $a_k = O(\frac{1}{k^2})$, la série $\sum a_k$ est absolument convergente.

(**3**) Montrer que le reste $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ admet le développement asymptotique : $R_n = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Posons $a_k = \frac{1}{2k^2} + \epsilon_k$. Alors $R_n = \frac{1}{2} R_n' + R_n''$ avec $R_n' = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $R_n'' = \sum_{k=n}^{\infty} \epsilon_k$.

Comme $x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient $\frac{1}{n} \leq R_n' \leq \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Cela montre que $R_n' = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

D'autre part on sait que $\epsilon_k = O(\frac{1}{k^3})$. Cela entraine que la suite (R_n'') est dominée par $R_n''' = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. En utilisant encore la comparaison "série - intégrale" on voit que $R_n''' \sim \frac{1}{2n^2}$ et donc $R_n'' = O(\frac{1}{n^2})$. Cela termine la preuve de la question.

(**4**) En déduire que la série harmonique admet le développement asymptotique suivant :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

En sommant la relation $\frac{1}{k} = a_k + \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ entre 1 et $n-1$, on obtient

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \int_1^n \frac{dt}{t} = \gamma - R_n + \ln(n).$$

Soit $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n} - R_n$. Comme $R_n = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$, on obtient finalement $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 88

Considérons une suite réelle (x_n) formée de termes strictements positifs. On suppose que la suite $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

(**1**) Montrer que la série $\sum(\ln(\frac{x_{n+1}}{x_n}) - \frac{\alpha}{n})$ est convergente.

Sachant que le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a

$$\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

Cela permet de voir que la série $\sum(\ln(\frac{x_{n+1}}{x_n}) - \frac{\alpha}{n})$ est absolument convergente.

(**2**) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a : $x_n \sim Cn^\alpha$. *On utilisera le fait que* $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, *voir l'exercice 87.*

Considérons la suite convergente

$$(\spadesuit) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) - \frac{\alpha}{k} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(x_{k+1}) - \ln(x_k)\Big) - \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(x_{n+1}) - \ln(x_1) - \alpha H_n.$$

Utilisons le fait que $H_n = \ln(n) + \delta_n$ avec (δ_n) convergente. En exponentiant la relation $(\spadesuit)$ on obtient

$$x_{n+1} = C_n\, n^\alpha$$

avec $C_n = x_1 e^{S_n + \alpha\delta_n}$. La suite (C_n) converge vers une limite $C > 0$. On a ainsi montré que $x_{n+1} \sim Cn^\alpha$.

On peut conclure que $x_n \sim Cn^\alpha$ car $n^\alpha \sim (n-1)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.