Université de Montpellier **Année Universitaire 2023-2024**
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

TD 6

Exercice 1. Soit $\mu > 0$. On considère l'EDP

$$u_t - \mu\, u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Introduisons un pas de temps δt et aussi un pas d'espace δx. Pour j et n entiers, on note $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$. Ainsi les (x_j, t_n) définissent une grille de points ou un *maillage* dans le plan (x, t). On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma.

On considère le schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \mu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2}.$$

1. Montrer que le schéma peut s'écrire ainsi :
$$u_j^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1-2r)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n.$$
où on a noté $r = \mu\delta t/\delta x^2$.
2. Déterminer l'*erreur de consistance* du schéma.
3. Même question avec le schéma de Crank-Nicolson :
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \mu\, \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\delta x^2.} \right\}$$
qui s'écrit :
$$-r\, u_{j-1}^{n+1} + (1+2r)\, u_j^{n+1} - r\, u_{j+1}^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1-2r)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n.$$
où maintenant $r = \frac{\mu\delta t}{2\delta x^2}$.
4. Pour ce dernier schéma, pour $u_j^0 = \exp(ikx_j)$ calculer le facteur d'amplification $G(k)$ tel que $u_j^{n+1} = G(k)u_j^n$ et en déduire que le schéma est *inconditionnellement* stable.

Exercice 2. (Compléments). Résolution de l'équation de la chaleur par série de Fourier en domaine borné. Soit $\mu > 0$. On considère sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, l'EDP

$$u_t - \mu\, u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < 2\pi \tag{2}$$

avec des conditions limites *périodiques :* $u(2\pi, t) = u(0, t), \quad \forall t \geq 0$.
On suppose que $f \in L^2(0, 2\pi)$ et que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp inx$ où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)\, dx$ désignent les coefficients de Fourier de f.

1. On cherche la solution $u(x, t)$ sous la forme $u(x, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) \exp inx$. *Sans vous préoccuper de la convergence des séries*, montrer que $c_n(t)$ vérifie une équation différentielle ordinaire puis que $u(x, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} \exp inx$.
2. En déduire que $\lim_{t\to+\infty} u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$. Interprétez physiquement ce résultat.
3. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-\mu n^2 t} \exp inx$ converge $\forall t > 0, \forall x \in [0, 2\pi]$ et que $(x, t) \mapsto u(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi]\times]0, +\infty[)$. Ainsi l'équation de la chaleur régularise la solution et ce même pour une donnée initiale f peu régulière.