Module HAX201X
Année 2021/2022

Correction des exercices « ♠ » des feuilles 5 et 6

Exercice 47

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\ell \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$. On suppose que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et que $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$. Montrer que $\ln f(x) \underset{x_0}{\sim} \ln g(x)$. Est-ce encore vrai pour $\ell = 1$?

Par définition, il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie au voisinage de x_0 vérifiant

$$\begin{cases} f(x) = g(x)\epsilon(x) \text{ au voisinage de } x_0, \\ \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 1. \end{cases}$$

Cela donne la relation $\ln(f(x)) = \ln(g(x)) + \ln(\epsilon(x))$. Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$, alors $\lim_{x \to x_0} \ln(g(x)) = \ln(\ell) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}) \setminus \{0\}$, et ainsi $\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(\epsilon(x))}{\ln(g(x))} = 0$. Si on pose $\eta(x) = 1 + \frac{\ln(\epsilon(x))}{\ln(g(x))}$, on a

$$\begin{cases} \ln(f(x)) = \ln(g(x))\eta(x) \text{ au voisinage de } x_0, \\ \lim_{x \to x_0} \eta(x) = 1. \end{cases}$$

On a démontré que $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(g(x))$.

Considérons la situation suivante : $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{x^2}$ en $x_0 = 0$. On voit que $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$ mais $\ln(f(x)) = x$ n'est pas équivalent en 0 à $\ln(g(x)) = x^2$

Exercice 48

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 2f\left(\frac{x}{3}\right)$.

(1) Justifier que f admet un maximum sur $[0, 1]$.

(2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) \leq 2^k f\left(\frac{x}{3^k}\right)$.

(3) Pour tout $x \geq 0$, on pose $k_0(x) = \min\{k \in \mathbb{N} | \frac{x}{3^k} \leq 1\}$. Justifier l'existence de $k_0(x)$ et montrer que $k_0(x) \leq \frac{\ln x}{\ln 3} + 1$.

(4) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(x^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$.

(1) Comme la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue, la quantité $M := \sup_{x \in [0,1]} f(x)$ est finie.

(2) Les relations $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2^k f\left(\frac{x}{3^k}\right)$ se démontrent facilement par récurrence.

(3) Comme $\lim_{k \to \infty} \frac{x}{3^k} = 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} | \frac{x}{3^k} \leq 1\}$ est non vide. Ainsi l'entier $k_0(x)$ est bien défini car toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Par définition l'entier $k_0(x) - 1$ n'appartient pas à $\{k \in \mathbb{N} | \frac{x}{3^k} \leq 1\}$: ainsi $\frac{x}{3^{k_0(x)-1}} > 1$. En prenant le logarithme on obtient la relation $k_0(x) \leq \frac{\ln x}{\ln 3} + 1$.

(4) On a

$$f(x) \leq 2^{k_0(x)} f\left(\frac{x}{3^{k_0(x)}}\right) \leq 2^{\frac{\ln x}{\ln 3}+1} M = 2M\, x^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}, \qquad \forall x \geq 0.$$

On obtient donc que $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(x^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$.

Exercice 57

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(1) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Remarque générale : On remarque que f est C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Donc, tous nos efforts vont se concentrer sur l'étude du comportement de la fonction en 0.

On a, pour x au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)}$$

et donc

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\right)^3 + o(x^3)$$

On obtient finalement le développement limité à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$(\star) \qquad f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}x^2 + o(x^3).$$

(2) Montrer que f est continue.

Le développement limité $(\star)$ montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0. On a donc montré que f est continue.

(3) Montrer que f est de classe C^1.

Le développement limité $(\star)$ nous permet de conclure que $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$. Un calcul direct donne

$$f'(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

La dérivée f' est donc définie sur $\mathbb{R}$ par les relations

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{-1}{2} & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Nous allons vérifier que f est continue en 0. Le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x(1 - x) - 1$ en 0 est

$$e^x(1 - x) - 1 = \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)(1 - x) - 1 = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

D'autre part, au voisinage de 0, on a $(e^x - 1)^2 = (x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2 = x^2 + x^3 + o(x^3)$. Finalement,

$$(\clubsuit) \quad f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2 + x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + o(x)}{1 + x + o(x)} = (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}x)(1 - x) + o(x) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}x + o(x)$$

Cela montre que $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$, donc f' est continue en 0. Nous avons montré que f est de classe C^1.

(4) Montrer que f est de classe C^2.

Le DL $(\clubsuit)$ montre que $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{1}{6}$. Un calcul direct montre que

$$f''(x) = \frac{e^x((x - 2)e^x + x + 2)}{(e^x - 1)^3}, \quad \forall x \neq 0.$$

Au voisinage de 0, nous avons $e^x((x - 2)e^x + x + 2) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $(e^x - 1)^3 = x^3 + o(x^3)$. Cela montre que $\lim_{x\to 0} f''(x) = \frac{1}{6} = f''(0)$, donc f'' est continue en 0. Nous avons montré que f est de classe C^2.

Exercice 58

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynome P_n tel que $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.

On montre cela par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$.

Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(1) Pour $n = 0$, on a $g(0) = 0$ par définition.

(2) Supposons que $g^{(n)}(0) = 0$. Soit N le degré du polynôme P_{n+1} : il existe $c \neq 0$ tel que $P_n(t) \underset{\infty}{\sim} ct^N$. Ainsi, au voisinage de 0^+, la fonction
$$\frac{e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{c\, x^{N+1}}$$
tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$. On a montré que $g^{(n+1)}(0) = 0$.

(3) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Quels sont ses DL en 0 ?

La fonction est C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$, comme composée de fonction C^∞. Ensuite on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x) = 0 = g^{(n)}(0).$$
Cela permet de conclure que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Le DL de g à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 est $g(x) = o(x^n)$.

(4) Existe-t-il une autre fonction ayant les mêmes DL en 0 que g ?

Oui, la fonction identiquement nulle.