Devoir maison : correction

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}$.
Pour cela on considère les suites $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$ et $U_n = \frac{e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

A - Étude de la suite (I_n)

A.1 Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

La fonction $\sin(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc pour tout $0 \leq r < \frac{\pi}{2}$, on a la majoration

$$0 \leq I_n = \int_0^r \sin(x)^n dx + \int_r^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx \leq r\sin(r)^n + \frac{\pi}{2} - r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit r tel que $0 < \frac{\pi}{2} - r \leq \epsilon/2$. Comme $\lim_{n\to\infty} r\sin(r)^n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r\sin(r)^n \leq \epsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Finalement on a montré que $0 \leq I_n \leq \epsilon$, $\forall n \geq N$.
Conclusion : $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

A.2 Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On effectue une intégration par partie pour l'intégrale $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n+1}\sin(x)dx$, en posant $u(x) = \sin(x)^{n+1}$ et $v'(x) = \sin(x)$. La relation $I_{n+2} = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$ donne

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \cos(x)^2 dx = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n+2} dx\right),$$

c'est à dire $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. On obtient finalement la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A.3 Vérifier que (I_n) est décroissante, et en déduire au moyen de la question **A.2** que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

Comme $0 \leq \sin(x) \leq 1$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x)^{n+1} \leq \sin(x)^n$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Cela entraine que $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$: la suite (I_n) est décroissante.
En divisant les inégalités $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ par $I_n > 0$, on obtient

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, l'encadrement précédent donne $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

A.4 Montrer que

$$(\star) \quad I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \qquad \text{et} \qquad (\star\star) \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On démontre facilement ces relations par récurrence. Traitons le cas de la suite (I_{2p}). Tout d'abord, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ donc la relation $(\star)$ est vraie en rang $p = 0$. Supposons maintenant que $(\star)$ est satisfaite au rang $p \in \mathbb{N}$. La relation démontrée à la question **A.2** donne

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2}\frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}\,(p+1)!)^2}$$

La relation $(\star)$ est donc satisfaite au rang $p+1$. Conclusion : $(\star)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

B - Étude de la suite (U_n)

On considère la fonction $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x \geq 0$.

B.1 Montrer que $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = (n+\frac{1}{2})f(\frac{1}{n}), \forall n \geq 1$.

On calcule

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{-(n+1)}\,(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{-n}\,n^{n+\frac{1}{2}}} = e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Ainsi $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 = (n+\frac{1}{2})\left(\ln(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = (n+\frac{1}{2})f(\frac{1}{n})$.

B.2 Montrer que $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. En déduire que (U_n) est croissante.

On voit que $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{4}{(2+x)^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$: la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on peut en déduire que $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. On obtient alors $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = (n+\frac{1}{2})f(\frac{1}{n}) \geq 0$, ce qui implique $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, et donc, en multipliant par $U_n > 0$, on a $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

B.3 Montrer que $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = O(\frac{1}{n^2})$. *On effectuera un DL à l'ordre 3 de f en 0.*

Calculons quelques DL à l'ordre 3 en $x = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\frac{2x}{2+x} = 2 - \frac{2}{1+\frac{x}{2}} = 2 - 2(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^3}{8} + o(x^3)) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{4} + o(x^3)$$

Le DL à l'ordre 3 de f en 0 est alors : $f(x) = \frac{x^3}{12} + o(x^3)$. En faisant le changement de variables $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on obtient

$$\ln(\tfrac{U_{n+1}}{U_n}) = (n+\tfrac{1}{2})f(\tfrac{1}{n}) = (n+\tfrac{1}{2})\left(\tfrac{1}{12n^3} + o(\tfrac{1}{n^3})\right) = \tfrac{1}{n^2}\left(\tfrac{1}{12} + o(1)\right).$$

Cela permet de voir que la suite $n^2\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n})$ converge $\frac{1}{12}$. Elle est donc bornée : il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq \ln(\tfrac{U_{n+1}}{U_n}) \leq \tfrac{C}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

B.4 Montrer que la suite (U_n) est convergente.

Faisons la somme des inégalités $\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) = \ln(\frac{U_{k+1}}{U_k}) \leq \frac{C}{k^2}$ pour k variant de 1 à $n-1$. On obtient

$$\ln(U_n) - \ln(U_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) \leq C\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{1}{k^2}$$

On utilise maintenant que la suite $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$ est bornée (voir le cours). Cela permet de conclure que la suite $\ln(U_n)$, (et donc aussi (U_n)) est bornée. Sachant que (U_n) est croissante, on peut conclure que la suite (U_n) est convergente.

B.5 Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} U_n > 0$. Montrer que $n! \sim \ell^{-1}\,e^{-n}\,n^{n+\frac{1}{2}}$.

C'est immédiat : la suite $\frac{\ell^{-1}\,e^{-n}\,n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} = \frac{U_n}{\ell}$ converge vers 1.

B.6 Calculer des équivalents simples des suites (I_{2p}) et (I_{2p+1}). En déduire que $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$.

Grace à la question **A.4**, on calcule les équivalents suivants :

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p\,p!)^2} \sim \frac{\pi}{2}\frac{\ell^{-1}\,e^{-2p}\,(2p)^{2p+\frac{1}{2}}}{(2^p\ell^{-1}\,e^{-p}\,p^{p+\frac{1}{2}})^2} \sim \pi\ell\,\frac{1}{\sqrt{2p}}$$
$$I_{2p+1} = \frac{(2^p\,p!)^2}{(2p+1)!} \sim \frac{(2^p\ell^{-1}\,e^{-p}\,p^{p+\frac{1}{2}})^2}{(2p+1)(\ell^{-1}\,e^{-2p}\,(2p)^{2p+\frac{1}{2}})} \sim \frac{1}{2\ell}\,\frac{1}{\sqrt{2p}}$$

Comme $\lim_{p\to\infty}\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$, on doit avoir $\pi\,\ell = \frac{1}{2\ell}$, soit $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$.