Université de Montpellier **Année Universitaire 2023-2024**
Faculté des Sciences
Mathématiques

L3 : module HAX604X Analyse numérique des équations différentielles.

TP 5

Schémas aux différences finies pour l'équation de transport.

Ecrire une fonction `transport(c, T, xmin, xmax, dx, dt)` qui calcule la solution $u(x,t)$ de l'EDP $u_t + cu_x = 0$ avec la donnée initiale $u(x,0) = f(x)$ sur le segment $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ pour $0 \leq t \leq T$. Le réel c est une constante.

Vous utiliserez la méthode des différences finies avec divers schémas explicites : schéma amont, schéma centré, schéma de Lax-Friedrichs, schéma de Lax-Wendroff avec le pas d'espace dx et le pas de temps dt (voir les schémas plus loin).

La fonction `transport` calcule une matrice $\mathtt{u} = \mathtt{u(j,n)}$ où $u(j,n)$ est censée approcher $u(x_j, t_n)$. La grille de points (x_j, t_n) est obtenue en discrétisant le rectangle $(x_{min}, x_{max}) \times (0, T)$ avec un pas d'espace δx et un pas de temps δt. Coder les schéma explicites suivant (où on a noté $r = c\delta t/\delta x$.)

$$\text{amont :} \quad u_j^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1-r)\, u_j^n.$$

$$\text{centré :} \quad u_j^{n+1} = \tfrac{r}{2}\, u_{j-1}^n + u_j^n - \tfrac{r}{2}\, u_{j+1}^n.$$

$$\text{Lax} - \text{Friedrichs :} \quad u_j^{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{r}{2})\, u_{j-1}^n + (\frac{1}{2} - \frac{r}{2})\, u_{j+1}^n.$$

$$\text{Lax} - \text{Wendroff :} \quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(r^2 + r)\, u_{j-1}^n + (1 - r^2)\, u_j^n + \frac{1}{2}(r^2 - r)\, u_{j+1}^n.$$

La fonction devra tracer sur une même figure les 3 courbes $x \mapsto u(x,0)$, $x \mapsto u(x,T)$ et la solution exacte $x \mapsto f(x - cT)$ pour chacun des schémas. La condition initiale $f(x)$ pourra être de trois types différents : indicatrice $1_{(x<0)}$ puis une cloche de Gauss $\exp(-25(x - (x_{min} + x_{max})/2)^2)$, ou encore une fonction indicatrice lissée : $x \mapsto 4x^2\,(3 - 4x) \cdot 1_{(0<x<0.5)} + 1_{(x \geq 0.5)}$. Vous pouvez inclure la définition de la fonction $f(x)$ dans une fonction placée à la fin de la fonction principale `transport`.

```
 Matlab
function y=f(x)
    %indicatrice 1_(x<0)
     y = 1.*(x<0);
    % cloche de Gauss.
    % y = exp(-25*( x- (xmin + xmax)/2).^2);
end
 Python
# donnée initiale
def f(x):
    # decommenter la fonction choisie.
    # fonction 1_(x<0)
    y = np.zeros_like(x)
    y[x < 0] = 1
    # cloche de Gauss.
    # y = np.exp(-25 * (x - (xmin + xmax) / 2) ** 2)
    return y
```

Pour simplifier, vous prendrez des *conditions limites constantes* au cours des itérations :

```
Matlab
u(1,n+1) = u(1,n)
u(end, n+1) = u(end, n)
Python
# conditions au bord constantes
    u[0, n + 1] = u[0, n]
    u[-1, n + 1] = u[-1, n]
```

Comparer les résultats des différents schémas pour les paramètres suivants $c = 0.5$, $T = 0.75$, $\delta t = 0.01$, $\delta x = 0.01$ $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$. Prenez ensuite $\delta t = 0.02$ puis $\delta t = 0.021$. Que se passe-t-il ?
Changer enfin c en $c = -0.5$. Que constatez-vous ?