

## TD5

### Ex 1

1. les courbes caractéristiques vérifient:

$$\dot{\xi}(t) = u(\xi(t), t), \quad \xi(0) = x_0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{d}{dt} u(\xi(t), t) &= u_x \cdot \dot{\xi} + u_t \\ &= u \cdot u_x + u_t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$t \mapsto u(\xi(t), t)$  est constante sur les caractéristiques.

Donc (1) donne  $\dot{\xi}(t) = u(\xi(t), t)$

$$\dot{\xi}(t) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

$$\text{Donc } \xi(t) = f(x_0)t + x_0$$

les caractéristiques sont des droites, dont la pente dépend du profil initial.

2.  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc  $f$  est croissante.

On sait que la solution  $u(x, t)$  de (1) est donnée par

$$u(x, t) = f(p(x, t))$$

où  $x_0 = p(x, t)$  est le pied de la

caractéristique telle que  $x_0 + f(x_0)t = x$

At fixé, soit  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

l'application  $x_0 \mapsto x_0 + t f(x_0)$

est continue et strictement croissante  $\forall t \geq 0$

En effet  $\varphi'_t(x_0) = 1 + t f'(x_0) \geq 1$

Donc  $\varphi_t$  est bijective. De plus pour  $x \geq A$

$\varphi_t(x) \geq x + t f(A)$  donc  $\varphi_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

De m<sup>me</sup> pour  $x \leq B$   $\varphi_t(x) \leq x + t f(B)$   $\varphi_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

$\varphi_t$  est un  $C^1$  difféo de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p(x,t) = \varphi_t^{-1}(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \geq 0$ .

$u(x,0)$   profil initial

évolution du profil



droites caractéristiques  
de pente  $\frac{1}{f(x_0)}$

le profil  $u(x,t)$  a tendance à s'aplatir.

3.  $\exists x_0, f'(x_0) < 0$ . Il existe donc  $x_1 > x_0$  tel que  $f(x_1) < f(x_0)$ .

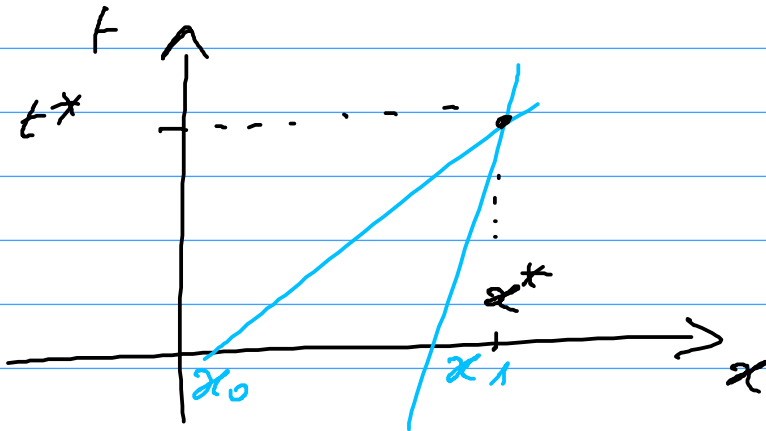
la caractéristique:  $x = x_0 + t f(x_0)$   
issu de  $x_0$  et celle issu de  $x_1$ :

$$x = x_1 + t f(x_1)$$

ront nécessairement se croiser à l'instant  $t^*$

$$x_0 + t^* f(x_0) = x_1 + t^* f(x_1)$$

$$t^* = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)} > 0$$

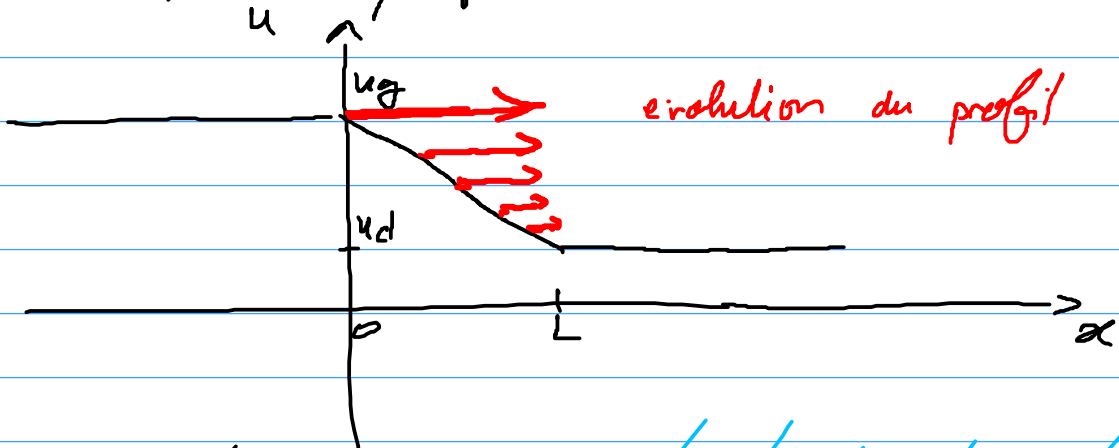


$u$  est constante sur chacune des 2 caractéristiques mais comme

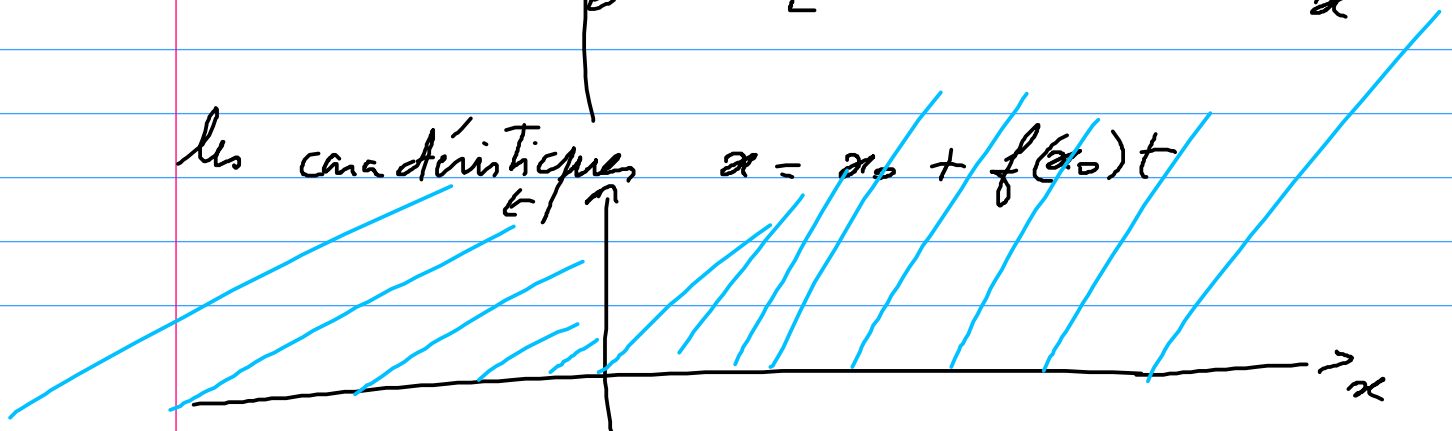
$$u(x_0 + f(x_0)t, t) = f(x_0)$$

et  $u(x_1 + f(x_1)t, t) = f(x_1) \neq f(x_0)$   
 les 2 valeurs rentrent en conflit à  $t = t^*$   
 on ne peut définir  $u(x^*, t^*)$  qui  
 ne peut prendre 2 valeurs différentes.

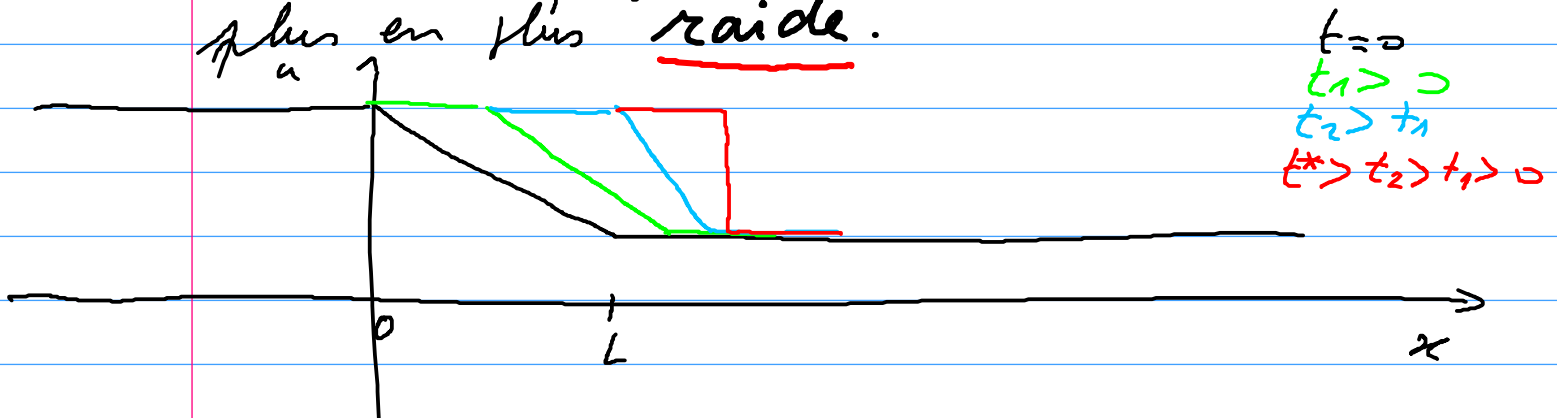
4. Tracé le profil initial



les caractéristiques  $x = x_0 + f(x_0)t$



les caractéristiques vont nécessairement se croiser. Le profil de la solution devient de plus en plus raide.



L'instant  $t^*$  correspond au croisement de la caractéristique issue de  $x_0 = 0$

$$x = f(0)t = u_0 t$$

avec la caractéristique issue de  $x_0 = L$

$$x = L + u_d t$$

$$\text{donc } t^* = \frac{L}{(u_0 - u_d)}$$

A cet instant le sommet de l'onde rattrape le bas de l'onde et le profil devient vertical: une discontinuité apparaît.

A partir de cet instant la méthode des caractéristiques devient inopérante, une onde de choc apparaît et se propage.

Ex2

$$1. \quad u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{c\delta t}{\delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c\delta t}{\delta x}\right) u_j^n - \frac{c\delta t}{\delta x} u_{j+1}^n$$

$$u_j^{n+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^n - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^n$$

2. L'erreur de consistance s'obtient en injectant la solution exacte de l'EDP dans le schéma numérique.

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_{n+1}) - \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u(x_j, t_n) + \frac{c}{\rho} u(x_{j+1}, t_n)$$

Effectuons un développement de Taylor

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \delta t u_t(x_j, t_n) + O(\delta t^2)$$

$$u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + \delta x u_x(x_j, t_n) + O(\delta x^2)$$

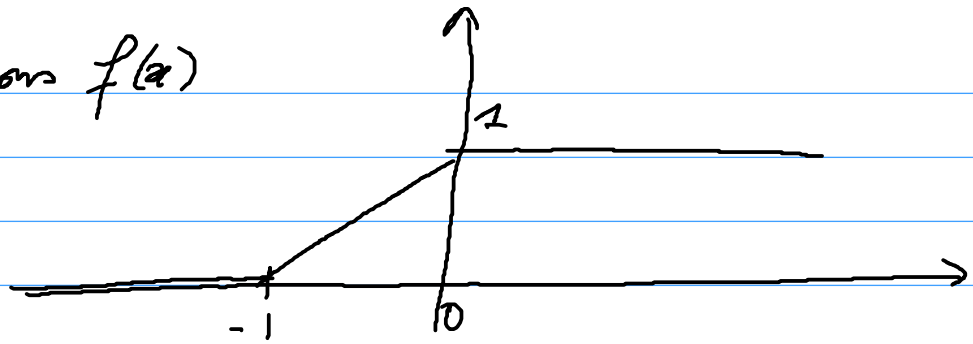
$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_n) + \delta t u_t(\cdot) + O(\delta t^2) - \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u(x_j, t_n) + \frac{c}{\rho} \left\{ u(x_j, t_n) + \delta x u_x(\cdot) + O(\delta x^2) \right\}$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \delta t u_t(\cdot) + \frac{c}{\rho} \delta x u_x + O(\delta t^2) + \frac{c}{\rho} O(\delta x^2) \\ = \delta t (u_t + c u_x) + O(\delta t^2) + \frac{c\delta t}{\rho} O(\delta x^2)$$

$u$  sol. de l'EDP

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta t \delta x) \quad \square$$

3. Traçons  $f(x)$



Soit  $j \geq 0$   $x_j = j \delta x \geq 0$ . Le schéma s'écrit

$$u_j^{m+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^m - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^m$$

donc  $u_j^1 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^0 - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^0$

comme  $x_j \geq 0$   $u_j^0 = f(x_j) = 1$

Donc  $u_j^1 = 1 \quad \forall j \geq 0$

De  $\bar{m}$   $u_j^2 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^1 - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^1$

comme  $u_j^1 = 1 \quad \forall j$  on obtient de nouveau

$$u_j^2 = 1 \quad \forall j \geq 0$$

Par récurrence immédiate on trouve  $u_j^m = 1 \quad \forall j$

D'autre part on sait que la solution exacte est une onde

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

et  $f(x - ct) = 0$  si  $x - ct \leq -1$

Donc  $u(x, t) = 0$  si  $x - ct \leq -1$

Donc  $u(x_j, t_n) = 0$  si  $x_j - ct_n \leq -1$

soit  $u_j^n = 1 \quad \forall j \geq 0$

Donc le schéma ne peut pas converger vers la bonne solution et ce  $\forall \delta x$ ,  $\forall \delta t$  car pour  $x_j \geq 0$  et  $t_n$  assez grand

$$u(x_j, t_n) = 0 \quad \text{et} \quad u_j^m = 1.$$

Par le schéma la toujours cherche l'information vers la droite

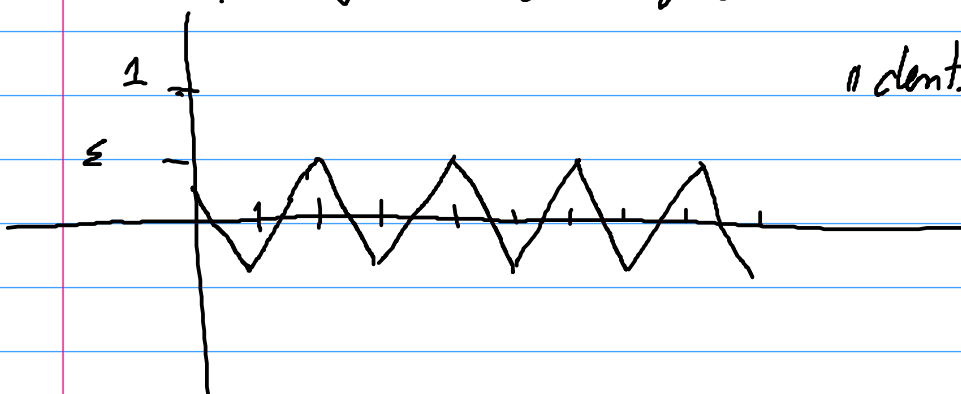
$$u_j^{m+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^m - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^m$$

alors que l'onde se propage depuis la gauche vers la droite.

Le schéma est mal conçu, il ne respecte pas la physique du phénomène.

4- soit  $f(x) = \varepsilon \cos\left(\frac{\pi x}{\delta x}\right)$

$$u_j^0 = f(x_j) = f(j \delta x) = \varepsilon \cos(j\pi) = \varepsilon \cdot (-1)^j$$



"dents de scie"

le schéma donne  $u_j^{m+1} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) u_j^m - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^m$

$m=0$   $u_j^1 = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) \varepsilon (-1)^j - \frac{c}{\rho} \varepsilon (-1)^{j+1}$

$$u_j^1 = \varepsilon \left(1 + \frac{2c}{\rho}\right) (-1)^j$$

Ensuite  $u_j^2 = (1 + \frac{c}{\rho}) u_j^1 - \frac{c}{\rho} u_{j+1}^1$

$$u_j^2 = (1 + \frac{2c}{\rho}) \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho}) (-1)^j$$

$$u_j^2 = \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho})^2 (-1)^j$$

par récurrence...  $u_j^m = \varepsilon (1 + \frac{2c}{\rho})^m (-1)^j$

$$\|u^m\|_{\infty} = \max_j |u_j^m| = \varepsilon \left[1 + \frac{2c}{\rho}\right]^m$$

$\varepsilon > 0, c > 0, \rho > 0 \quad (1 + \frac{2c}{\rho}) > 1$

Donc  $\|u^m\|_{\infty} \rightarrow +\infty$

Alors que la solution exacte,  $u(x,t) = f(x-ct)$  vérifie

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} = \varepsilon$$

Le schéma produit des solutions numériques non bornées alors que la solution exacte est bornée. C'est un schéma instable.

Ex 3 Schéma de Lax-Friedrichs.

$$\frac{u_j^{m+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^m + u_j^m)}{\delta t} + c \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\delta x} = 0$$



$$\begin{aligned}
 1- \quad u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c \delta t}{\delta x} \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho} \right) u_{j-1}^n \quad \text{avec } \rho = \delta x / \delta t
 \end{aligned}$$

le schéma va bien chercher l'information des 2 côtés (gauche et droit).

$$\begin{aligned}
 2- \quad \varepsilon(\delta t, \delta x) &= u(x_j, t_{n+1}) - \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho} \right) u(x_{j+1}, t_n) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho} \right) u(x_{j-1}, t_n)
 \end{aligned}$$

Effectuons des développements de Taylor

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\delta t, \delta x) &= u(x_j, t_n) + \delta t u_t + O(\delta t^2) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho} \right) \left( u(x_{j+1}, t_n) - \delta x u_x + \frac{(\delta x)^2}{2} u_{xx} + O(\delta x^3) \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho} \right) \left( u(x_{j-1}, t_n) + \delta x u_x + \frac{(\delta x)^2}{2} u_{xx} + O(\delta x^3) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\delta t, \delta x) &= \delta t u_t + \frac{c \delta x}{\rho} u_x - \frac{\delta x^2}{2} u_{xx} + \frac{c}{2\rho} O(\delta x^3) \\
 &\quad + O(\delta t^2) \quad + O(\delta x^3)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \delta t (u_t + c u_x) + O(\delta t^2) + O(\delta x^2) + O(\delta t \delta x^2) + O(\delta x^3)$$

(on a utilisé  $\frac{c}{\rho} = \frac{c \delta t}{\delta x}$ )

$$\underline{\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta x^2)} \quad \begin{aligned} &\text{car } O(\delta x^3) \ll O(\delta x^2) \\ &O(\delta t \delta x^2) \ll O(\delta x^2) \end{aligned}$$

On trouve une erreur de consistance d'ordre 2 comme pour le schéma précédent.

3. Pour étudier la stabilité on prend  $f(x) = e^{ikx}$

$$f(x_j) = e^{ikj\delta x}$$

lorsque la fréquence vaut  $k = \pi/\delta x$

$$f(x_j) = e^{ij\pi} = (e^{i\pi})^j = (-1)^j$$

la fonction est "dent de scie" de période  $2\delta x$ .

Montrons par récurrence sur  $n$  que

$$u_j^n = G(k)^n \cdot u_j^0 \quad (HR_n)$$

c'est vrai pour  $n=0$  par construction  
supposons  $HR_n$  est vraie.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1+c}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1-c}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) u_{j-1}^n$$

$$= \left(\frac{1+c}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) G(k)^n u_{j+1}^0 + \left(\frac{1-c}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) G(k)^n u_{j-1}^0$$

$$u_j^0 = e^{ikj\delta x} \quad \text{donc}$$

$$u_j^{n+1} = G(k)^n \left( \left(\frac{1+c}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik(j+1)\delta x} + \left(\frac{1-c}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik(j-1)\delta x} \right)$$

$$u_j^{n+1} = G(k)^n \left( \left(\frac{1+c}{2} + \frac{c}{2\rho}\right) e^{-ik\delta x} + \left(\frac{1-c}{2} - \frac{c}{2\rho}\right) e^{ik\delta x} \right) e^{ikj\delta x}$$

on reconnaît  $G(k)$

$u_j^0$

$$u_j^{n+1} = G(k)^{n+1} u_j^0$$

on a bien montré  $HR_{n+1}$ .

Étudions le module de  $G(k)$ .

$$G(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2p}\right) e^{ik\delta x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2p}\right) e^{-ik\delta x}$$
$$= \cos(k\delta x) - \frac{c}{p} i \sin(k\delta x)$$

$$\text{Donc } |G(k)|^2 = \cos^2(k\delta x) + \frac{c^2}{p^2} \sin^2(k\delta x)$$
$$= 1 + \left(\frac{c^2}{p^2} - 1\right) \sin^2(k\delta x)$$

si  $|c/p| > 1$  alors  $|G(k)| > 1$

si  $|c/p| \leq 1$  alors  $|G(k)| \leq 1$   $\square$

4- Lorsque  $-1 \leq \frac{c}{p} \leq 1$ ,

$$|u_j^n| = |G(k)|^n |u_j^0| \leq |u_j^0|$$

$$\max_j |u_j^n| \leq \max_j |u_j^0|$$

$$\|u^n\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty} = 1$$

Les valeurs calculées par le schéma restent bornées, comme la donnée initiale.

le schéma de Lax-Friedrichs est stable.

P9

Comme il est consistant d'après 2, le schéma de Lax-Friedrichs est convergent et d'ordre  $2-1=1$

Rq le schéma de Lax-Friedrichs est intéressant car il s'applique quel que soit le signe de  $c$ .

4 On peut montrer que  $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$  pour une donnée initiale quelconque et pas seulement pour une donnée initiale oscillante du type  $e^{ikx}$ .

En effet si  $\frac{c}{\rho} \in [-1, 1]$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho}$  et  $\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho}$  sont des coefficients  $\geq 0$  dont la somme vaut 1.

Donc  $u_j^{n+1}$  est une combinaison convexe des valeurs  $u_{j-1}^n$  et  $u_{j+1}^n$  donc

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty \leq \dots \leq \|u^0\|_\infty.$$

On a même mieux:  $\max u_j^{n+1} \leq \max u_j^n$   
 $\min u_j^{n+1} \geq \min u_j^n$

On dit que le schéma est monotone.

Ex 4 le schéma de Lax-Wendroff:

$$u_j^{n+1} - u_j^n + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} - \frac{1}{2} c^2 \delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\delta x)^2} = 0$$

est encore un schéma explicite.

On peut écrire :

$$u_j^{m+1} = u_j^m - \frac{c \delta t}{2 \delta x} (u_{j+1}^m - u_{j-1}^m) + \frac{1}{2} \frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2} (u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) = 0$$

posons  $r = \frac{c \delta t}{\delta x}$

$$u_j^{m+1} = u_{j-1}^m \left( \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2} \right) + u_j^m (1 - r^2) + u_{j+1}^m \left( -\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2} \right)$$

$$u_j^{m+1} = \frac{1}{2} (r + r^2) u_{j-1}^m + (1 - r^2) u_j^m + \frac{1}{2} (r^2 - r) u_{j+1}^m$$

2- On porte la sol. exacte  $u(x_j, t_m)$  dans le schéma :

$$\varepsilon = u(x_j, t_{m+1}) - \frac{1}{2} (r + r^2) u(x_{j-1}, t_m) - (1 - r^2) u(x_j, t_m) - \frac{1}{2} (r^2 - r) u(x_{j+1}, t_m)$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \cancel{u(x_j, t_m)} + \delta t u_t + \frac{\delta t^2}{2} u_{tt} + O(\delta t^3) - \frac{1}{2} (r + r^2) (\cancel{u(x_j, t_m)} - \delta x u_x + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx} - \frac{\delta x^3}{6} u_{xxx} + O(\delta x^4))$$

$$- (1 - r^2) \cancel{u(x_j, t_m)} - \frac{1}{2} (r^2 - r) (\cancel{u(x_j, t_m)} + \delta x u_x + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx} + \frac{\delta x^3}{6} u_{xxx} + O(\delta x^4))$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \cancel{\delta t u_t} + \cancel{\frac{\delta t^2}{2} u_{tt}} + r \delta x u_x - \frac{r^2 \delta x^2}{2} u_{xx} + O(\delta t^3)$$

comme  $u$  est sol de  $u_t + c u_x = 0$   $+ \frac{r \delta x^3}{6} u_{xxx} + (r^2 + r^2) O(\delta x^4)$

$$\delta t (u_t + c u_x) = 0$$

et  $c \delta t = r \delta x$  par définition de  $r = \frac{c \delta t}{\delta x}$

donc  $\delta t u_t + r \delta x u_x = 0$

De plus  $u_t + c u_x = 0$  implique que  
 (2)  $u_{tt} + c u_{xt} = 0$  en dérivant  $\frac{\partial}{\partial t}$

On a de  $\bar{m} \quad u_{tx} + c u_{xx} = 0$

donc  $u_{tx} = u_{xt} = -c u_{xx}$

donc en portant dans (2) on obtient:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{C'est l'équation} \\ \text{des cordes vibrantes,} \\ \text{ou équation des ondes} \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } \delta t^2 u_{tt} - c^2 \delta t^2 u_{xx} = 0$$

$$\underline{\delta t^2 u_{tt} - r^2 \delta x^2 u_{xx} = 0}$$

Il reste donc  $\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^3) + \frac{r}{6} u_{xxx} \delta x^3 + (|r| + r^2) O(\delta x^4)$

Il faut tenir compte de  $r = \frac{c \delta t}{\delta x}$  donc  $\underline{r \delta x^3 = c \delta t \delta x^2}$

$$r \delta x^4 = c \delta t \delta x^3 \ll \delta t \delta x^2$$

$$r^2 \delta x^4 = c^2 \delta t^2 \delta x^2 \ll \delta t \delta x^2$$

Donc  $\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^3) + \underline{O(\delta t \delta x^2)}$

3) calculons comment le schéma amplifie le signal  $f(x)$  au cours des itérations au temps.

Montrons par récurrence que

$$HR^h \quad u_j^n = G(k)^n u_j^0 \quad \text{avec le facteur}$$

$$G(k) = 1 - r^2 + \frac{1}{2}(r^2 - r) e^{ik\delta x} + \frac{1}{2}(r^2 + r) e^{-ik\delta x}$$

Pour  $n=0$  c'est vrai.

$HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$  :

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(r^2 - r) G(k)^n u_{j+1}^0 + (1-r^2) G(k)^n u_j^0 + \frac{1}{2}(r^2 + r) G(k)^n u_{j-1}^0 \\
 u_j^{n+1} &= G(k)^n \left\{ \frac{(r^2 - r)}{2} e^{ik\delta x} u_{j+1}^0 + (1-r^2) u_j^0 + \frac{(r^2 + r)}{2} e^{-ik\delta x} u_{j-1}^0 \right\} \\
 &= G(k)^n \left\{ \frac{(r^2 - r)}{2} e^{ik\delta x} + (1-r^2) + \frac{(r^2 + r)}{2} e^{-ik\delta x} \right\} u_j^0
 \end{aligned}$$

on reconnaît  $G(k)$

$$u_j^{n+1} = G(k)^{n+1} u_j^0 \quad \square$$

on a donc que

$$|G(k)| = \left| 1-r^2 + \frac{1}{2}(r^2 - r) e^{ik\delta x} + \frac{1}{2}(r^2 + r) e^{-ik\delta x} \right|$$

$$G(k) = 1-r^2 + r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x) \quad (3)$$

$$|G(k)|^2 = (1-r^2 + r^2 \cos(k\delta x))^2 + r^2 \sin^2(k\delta x)$$

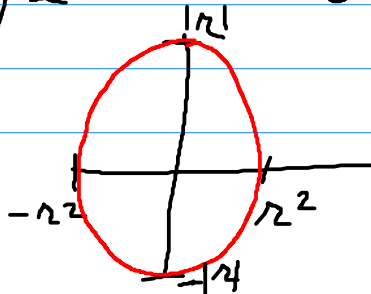
expression délicate à majorer. Un peu de géométrie ferait du bien :-)

considérons le plan complexe

$$G(k) = (1-r^2) + r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x)$$

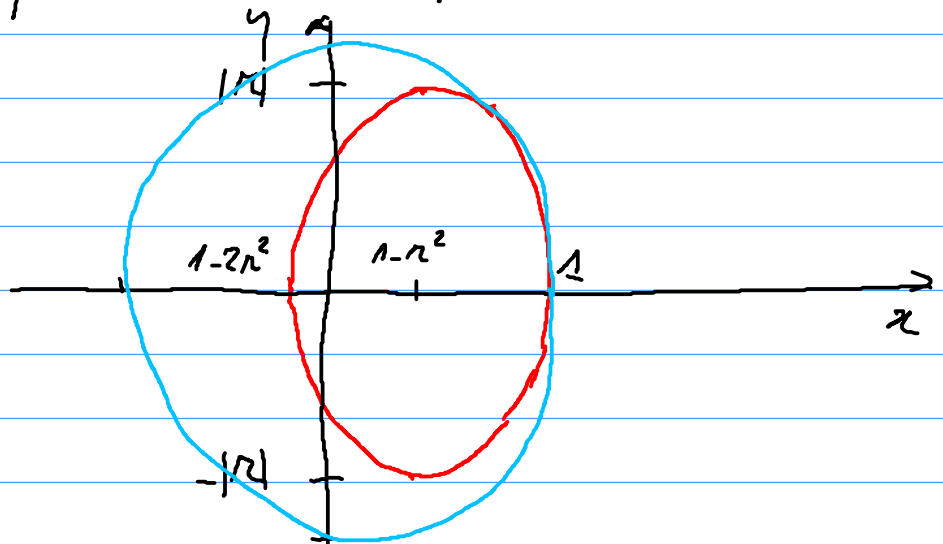
$$\left\{ r^2 \cos(k\delta x) - ir \sin(k\delta x); k \in \mathbb{R} \right\}$$

décrit une ellipse dont les axes de symétrie sont :



donc  $\{(1-r^2) + r^2 \cos(k\Delta x) - ir \sin(k\Delta x), k \in \mathbb{R}\}$

décrit une ellipse obtenue par translation de  $(1-r^2, 0)$



Pour que cette ellipse  $\circ$  soit contenue dans le

disque unité, il suffit que  $|r| \leq 1$  et  $1-2r^2 \geq -1$

Ces conditions sont satisfaites si  $-1 \leq r \leq 1$ .

C'est une condition suffisante de stabilité du schéma de Lax-Wendroff.

4. on remarque que

$u_j^{n+1}$  est une moyenne pondérée de  $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$  affectés des coefficients  $\frac{r^2+r}{2}, 1-r^2, \frac{r^2-r}{2}$

Les 3 coefficients somme à un, ce

qui est normal pour que le schéma soit exact pour les solutions constantes, MAIS lorsque  $|r| < 1$  l'un des coefficients  $\frac{r^2+r}{2}$  ou  $\frac{r^2-r}{2}$  est négatif



Donc on ne peut plus garantir que  
$$\min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$
  
On ne peut pas garantir  $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$

Rq le schéma de Lax-Wendroff  
étant stable pour  $|\frac{c \delta t}{\delta x}| < 1$

et consistant d'ordre 3

Il est convergent et c'est un schéma d'ordre 2  
en temps et en espace.

Cependant il n'est pas monotone.

Rq Il n'est pas évident de construire des  
schémas à la fois précis et monotones.