Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

Année Universitaire 2023-2024

TD 5. Introduction aux EDP.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$u_t + u\, u_x = 0, \quad u(x, t = 0) = f(x). \tag{1}$$

Cette EDP est appelée *équation de Burgers* et est utilisée en dynamique des gaz compressibles.

1. Déterminez les courbes caractéristiques de l'EDP (1) ?
2. On suppose que $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que la solution $u(x,t)$ obtenue par la méthode des caractéristiques est définie $\forall t \geq 0$.
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) < 0$. Montrer qu'alors la solution obtenue par la méthode des caractéristiques cesse d'être définie à partir d'un certain $t^\star$.
4. Soit la donnée initiale
$$f(x) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x \leq 0 \\ u_g - \frac{u_g - u_d}{L} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L \\ u_d & \text{si} \quad L \leq x \end{cases}$$
où $0 < u_d < u_g$. La fonction f n'est pas $\mathcal{C}^1$ car elle n'est pas différentiable en $x = 0$ et $x = L$. Cependant on peut tout de même appliquer la méthode des caractéristiques. Déterminer l'instant $t^\star$ où le profil de la solution devient vertical i.e. la solution devient discontinue.

La suite des exercices est consacrée à la *méthode des différences finies.*

On note δt le pas de temps et δx le pas d'espace. Pour j et n entiers, on note $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$. Ainsi les (x_j, t_n) définissent une grille de points ou un *maillage* dans le plan (x,t). Comme pour les EDO, on cherche à approcher $u(x_j, t_n)$. On note $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ la valeur approchée calculée par le schéma considéré.

Exercice 2. Soit $c > 0$. On considère l'EDP

$$u_t + c\, u_x = 0. \tag{2}$$

On considère le schéma explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c\, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} = 0.$$

1. Montrer que le schéma peut s'écrire ainsi :
$$u_j^{n+1} = (1 + \frac{c}{\rho})\, u_j^n - \frac{c}{\rho}\, u_{j+1}^n.$$
où on a noté $\rho = \delta x / \delta t$.
2. Déterminer l'*erreur de consistance* du schéma.
3. La donnée initiale $u(x, t = 0) = f(x)$ est définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}$$
Montrer que le schéma donne $u_j^n = 1, \quad \forall n \geq 0,\ \forall j \geq 0$. Le schéma est-il convergent ? C'est à dire a-t-on $u_j^n - u(x_j, t_n) \to 0$ quand $\delta t, \delta x \to 0$?
4. On prend maintenant la donnée initiale $f(x) = \varepsilon \cos(\pi x / \delta x)$. Que vaut u_j^0 ? Montrer que le schéma donne
$$u_j^n = \varepsilon\, (1 + 2(c/\rho))^n (-1)^j.$$
Calculer $\|u_\cdot^n\|_\infty = \max_j |u_j^n|$. Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$? Comparer avec la solution exacte de l'EDP. On dit que le schéma est *instable.*

Exercice 3. Schéma de Lax-Friedrichs. On reprend la même EDP d'advection linéaire (2), mais on ne suppose plus $c > 0$. On considère le schéma explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n]}{\delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = 0.$$

1. Montrer que le schéma peut s'écrire ainsi :

$$u_j^{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho})\,u_{j-1}^n + (\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho})\,u_{j+1}^n.$$

   où on a noté $\rho = \delta x/\delta t$.
2. Déterminer l'*erreur de consistance* du schéma.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. On prend maintenant la donnée initiale $f(x) = \exp(ikx)$. Le nombre k correspond à une fréquence spatiale. Que vaut $f(x_j)$ lorsque $k = \pi/\delta x$? Montrer que le schéma donne

$$u_j^n = G(k)^n \cdot u_j^0.$$

   où le facteur d'amplification $G(k) = (\frac{1}{2} - \frac{c}{2\rho})\exp(ik\delta x) + (\frac{1}{2} + \frac{c}{2\rho})\exp(-ik\delta x)$.
   Montrer que le gain $|G(k| \leq 1$ ssi $-1 \leq c/\rho \leq 1$. Lorsque cette condition appelée condition de Courant-Friedrichs-Lewy est vérifiée, on dit que le schéma de Lax-Friedrichs est *stable.*
4. Montrer que dans ce cas $\|u_\cdot^n\|_\infty \leq \max_j |u_j^0|$.

Exercice 4. Schéma de Lax-Wendroff. On reprend la même EDP d'advection linéaire (2), où $c \in \mathbb{R}$. On considère le schéma explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} - \frac{1}{2}c^2\delta t\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\delta x)^2} = 0.$$

1. Montrer que le schéma peut s'écrire ainsi :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(r^2 - r)\,u_{j+1}^n + (1 - r^2)\,u_j^n + \frac{1}{2}(r^2 + r)\,u_{j-1}^n.$$

   où on a noté $r = c\,\delta t/\delta x$ (appelé nombre de Courant) [1].
2. Déterminer l'*erreur de consistance* du schéma.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. On prend maintenant la donnée initiale $f(x) = \exp(ikx)$. Montrer que le gain du schéma est : $|G(k)| = |1 - r^2 + \frac{1}{2}(r^2 - r)\exp(ik\,\delta x) + \frac{1}{2}(r^2 + r)\exp(-ik\,\delta x)|$.
   Montrer que $|G(k| \leq 1$ si $-1 \leq r \leq 1$. Lorsque cette condition, appelée condition de Courant-Friedrichs-Lewy, est vérifiée, on dit que le schéma de Lax-Wendroff est *stable.*
4. A-t-on encore la propriété $\|u_\cdot^n\|_\infty \leq \max_j |u_j^0|$?

1. Richard Courant, 1888-1972, fondateur du Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU.