HAX201X - Analyse 2 - Année 2021-2022
CC du 22/02/22
Corrigé

Exercice 1

Soit (u_n) une suite réelle.

(a) La propriété "(u_n) est majorée" s'écrit

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq C.$$

La propriété "(u_n) n'est pas majorée" est sa négation et s'écrit donc

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > C.$$

(b) Une suite non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$.

Un exemple est la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$ n'est pas majorée car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = +\infty$. Cependant, cette suite ne tend pas vers $+\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = -\infty$.

Exercice 2

(a) On le montre par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}_n$ la propriété "$\varphi(n) \geq n$".

Initialisation. Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, on a bien $\varphi(0) \geq 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Comme $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, et $\varphi(n+1)$ est un entier strictement supérieur à n, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geq n$.

(b) On utilise la définition de la convergence d'une suite : on veut donc montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon.$$

<u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, <u>il existe $n_0 \in \mathbb{N}$</u> tel que $\forall n \geq n_0\ |u_n - l| < \varepsilon$.

<u>Soit $n \geq n_0$</u>, par la question (a), on a $\varphi(n) \geq n \geq n_0$. Comme $\varphi(n) \geq n_0$, par choix de n_0, on a bien <u>$|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$</u>.

(c) Pour tout $n \geq 1$, soit $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Compte tenu de ce qui précède, si cette suite converge, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite. Or on a

$$v_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

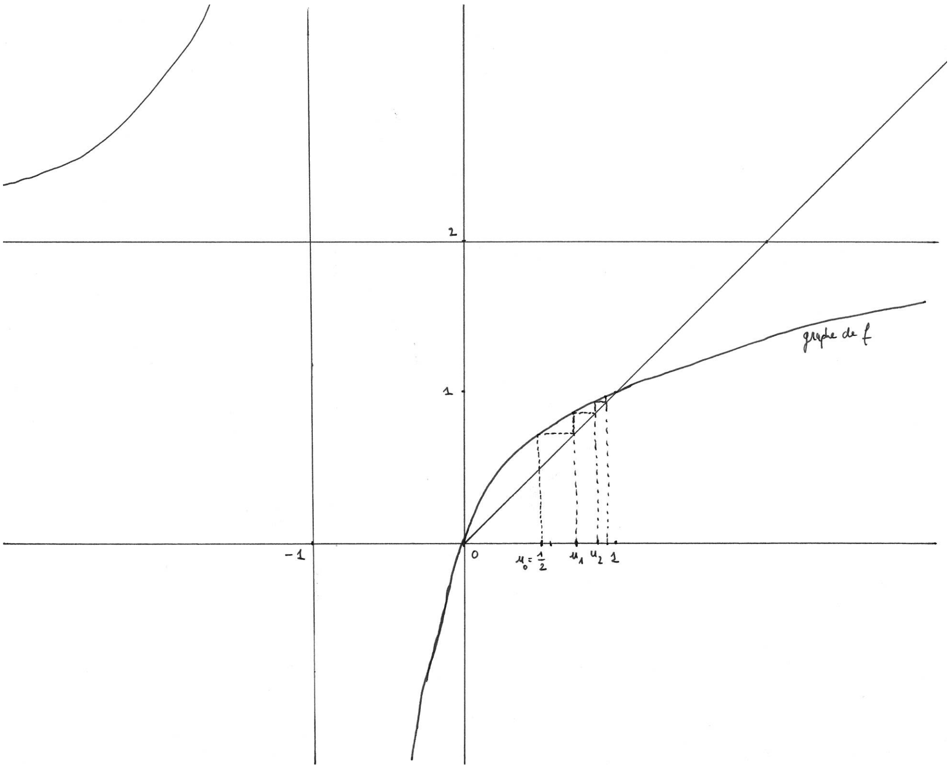
et

$$v_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1,$$

donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

Exercice 3

1. La fonction f est un fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en -1 et dont la limite en $+\infty$ est 2. Sont graphe est donc une hyperbole avec une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$. Par ailleurs, $f(0) = 0$ permet de situer les deux branches de l'hyperbole par rapport aux asymptotes.



2. On montre d'abord que l'intervalle $]0, 1[$ est stable par f. Le calcul de la dérivée de f donne $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Rightarrow 0 < f(x) < 1,$$

donc $f(]0, 1[) \subset\ ]0, 1[$ et $]0, 1[$ est stable par f.

On montre ensuite que, sur $]0, 1[$, le graphe de f est au dessus de la première bissectrice. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow 2x \geq x(x + 1) \Leftrightarrow 0 \geq x^2 - x \Leftrightarrow 0 \geq x(x - 1).$$

Pour tout $x \in\ ]0, 1[$ on a $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$, donc $x(x - 1) \leq 0$ et $f(x) \geq x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$, donc la suite (u_n) est croissante. Comme elle est aussi majorée par 1, elle converge.

Soit l sa limite, on sait que l est un point fixe de f. Or on a

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x = x(x + 1) \Leftrightarrow 0 = x^2 - x \Leftrightarrow 0 = x(x - 1) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1).$$

On a donc $l = 0$ ou $l = 1$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_0 > 0$ et par passage à la limite $l \geq u_0 > 0$. Donc $l \neq 0$ et $l = 1$.

3.(a) On utilise la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(5) \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3} \leq 5,$$

donc $f([1, 5]) \subset [1, 5]$ et $[1, 5]$ est stable par f.

3.(b) Pour appliquer le théorème du point fixe, il faut montrer que f est contractante sur $[1,5]$. On a $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \geq 0$ et

$$x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 2 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 4 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in [1,5]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$, donc f est bien contractante et le théorème du point fixe implique que (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $[1,5]$.

3.(c) On sait que les seuls points fixes de f sont 0 et 1, donc son unique point fixe sur $[1,5]$ est 1. Par ailleurs, comme $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, on a $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 1|$. Comme $1 \leq u_0 \leq 5$, on a également $0 \leq u_0 - 1 \leq 4$ et $|u_0 - 1| \leq 4$.

On en déduite finalement que $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n 4 = (\frac{1}{2})^{n-2}$.