HAX201X - Analyse 2 - Année 2021-2022

CC1 du 22/02/22 - Durée : 1h10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Soit (u_n), une suite réelle.

(a) Ecrire avec des quantificateurs que (u_n) n'est pas majorée.

(b) On suppose (u_n) non majorée. A-t'on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$? Justifier.

Exercice 2 (6 points)

Soit (u_n), une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$; et soit $\big(u_{\varphi(n)}\big)$, une suite extraite.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

(c) La suite $\left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 3 (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

1. Représenter (approximativement) le graphe de f, la droite d'équation $y = x$, ainsi que les premières valeurs de (u_n) pour le choix de $u_0 = \frac{1}{2}$.

2. Etudier, pour $u_0 \in]0, 1[$, la convergence de (u_n).

3. On suppose à présent que $u_0 \in [1, 5]$.
   (a) Montrer que $f\left([1, 5]\right) \subset [1, 5]$.
   (b) Montrer que (u_n) converge en appliquant le *Théorème du point fixe.*
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.