UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER L1 - ANALYSE 2 (HAX201X)
ANNÉE : 2022-2023

Devoir maison

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}.$$

Pour cela on considère les suites

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx \quad \text{et} \quad U_n = \frac{e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A - Étude de la suite (I_n)

A.1 Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

A.2 Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *On effectuera une intégration par partie.*

A.3 Vérifier que (I_n) est décroissante, et en déduire au moyen de la question **A.2** que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

A.4 Montrer que

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

B - Étude de la suite (U_n)

On considère la fonction $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x \geq 0$.

B.1 Montrer que $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = (n+\frac{1}{2}) f(\frac{1}{n}), \forall n \geq 1$.

B.2 Montrer que $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. En déduire que (U_n) est croissante.

B.3 Montrer que $\ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) = O(\frac{1}{n^2})$. *On effectuera un DL à l'ordre 3 de f en* 0.

B.4 Montrer que la suite (U_n) est convergente.

B.5 Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} U_n > 0$. Montrer que $n! \sim \ell^{-1}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}$.

B.6 Calculer des équivalents simples des suites (I_{2p}) et (I_{2p+1}). En déduire que $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$.