TD4

Ex 1

posons $u(x,t) := f(x-ct)$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x-ct) = f'(x-ct) \times (-c)$$

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x-ct) = f'(x-ct)$$

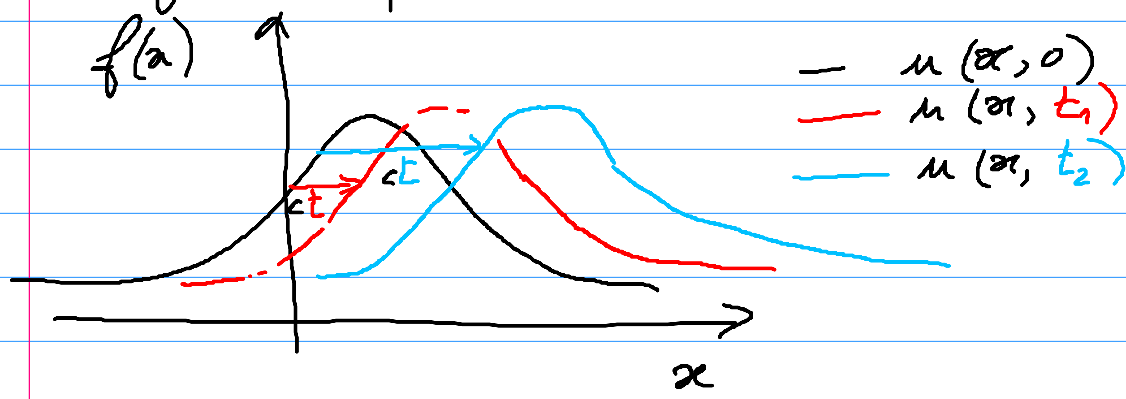
$$u_t + c\, u_x = -c f'(x-ct) + c f'(x-ct) = 0$$

Donc la fonction $u(x,t)$ est solution de (1)

$$u|_{t=0} = u(x,0) = f(x)$$

Donc la donnée initiale est la fonction $f(x)$.

$u(x,t) = f(x-ct)$ se déduit de $f(x)$ par translation de ct



la translation s'effectue vers la droite si $c>0$

" " gauche si $c<0$

Cas particulier $c=0$ $\quad u_t = 0 \iff u$ ne dépend pas de t

$\iff u(x,t) = f(x)$

On a donc une solution de type onde progressive (vers la droite, si $c>0$
vers la gauche, si $c<0$)
Lorsque $c=0$, on a une solution stationnaire.

$\frac{\partial}{\partial t}u + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ c homogène à $\frac{L}{T}$
i.e une vitesse

c est la vitesse de l'onde (ou <u>célérité</u>).

<u>Ex 2</u>

posons $u(x,t) = f(x/t)$ pour $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$u_t = f'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\left(-\frac{x}{t^2}\right) \quad \text{(fct composée)}$$

$$u_x = f'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t} \quad \text{"}$$

$$\Rightarrow u_t + \left(\frac{x}{t}\right)u_x = \left(-\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2}\right) f'(x/t) = 0$$

Donc $u(x,t) = f(x/t)$ est solution de l'EDP.

on remarque que $u(x,1) = f(x)$

$$u(x,t) = f(\lambda x) \quad \text{pour } \lambda = 1/t$$

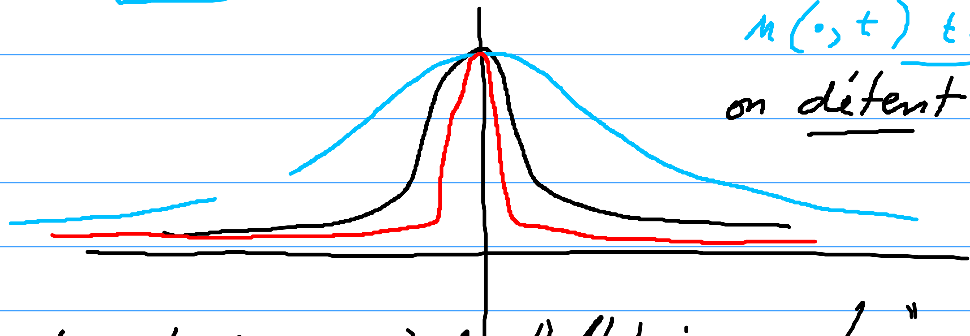
Donc il suffit d'effectuer la transformation affine

$$(x,y) \longmapsto (\lambda x, y) \quad \text{avec } \lambda := 1/t$$

au graphe $x \longmapsto u(x,t=1)$ pour obtenir le graphe de $x \longmapsto u(x,t)$.

cela revient à changer d'échelle sur l'axe des "x".

quand $\boxed{t > 1}$, on zoome : (on "aplatit" le graphe)



quand $t < 1$, c'est l'effet inverse (on "concentre" le graphe)

Rq Une telle application affine s'appelle une affinité de base (Oy) et de rapport $1/t$. A ne pas confondre avec une homothétie.

<u>EX3</u> Nous allons utiliser la <u>méthode des caractéristiques</u>.

On introduit les courbes $t \longmapsto \xi(t)$

solution de $\dot{\xi}(t) = c$

ce sont les courbes $\xi(t) = ct + x_0$, x_0 cte.
(des <u>droites</u> ici)

le terme $u_t + c\, u_x = u_t + \dot{\xi}(t)\, u_x$ évalué en $(\xi(t), t)$

est alors égal à $\frac{d}{dt}\, u(\xi(t), t)$

l'EDP s'écrit alors $\frac{d}{dt} u(\xi(t), t) + r\, u(\xi(t), t) = 0$

On s'est ainsi ramené à une EDO :

$$\frac{d}{dt} v(t) + r\, v(t) = 0$$

avec $v(t) := u(\xi(t), t)$

dont la solution est simplement

$$v(t) = v(0)\, e^{-rt}$$

$v(0) = u(\xi(0), 0) = f(x_0)$

donc $u(\xi(t), t) = f(x_0)\, e^{-rt}$

En remplaçant $\xi(t) = ct + x_0$

$$u(x_0 + ct, t) = f(x_0)\, e^{-rt}$$

posons $x = x_0 + ct$ on obtient :

$$\boxed{u(x,t) = f(x - ct)\, e^{-rt}}$$

on a la combinaison du terme de transport

$u_t + c u_x$

et du terme de réaction $u_t = -ru$

On a donc une onde propagative qui se déplace à vitesse c et qui est amortie exponentiellement ($r > 0$) ou amplifiée ($r < 0$).

Ex 4.1

$$u_t + c u_x = xt \; ; \quad u(x,0) = f(x)$$

utilisons la méthode des caractéristiques ce sont les courbes solutions de

$$\dot{\xi}(t) = c$$

i.e. les droites $\xi(t) = x_0 + ct$

le terme $u_t + c u_x = \frac{d}{dt} u(\xi(t), t)$

l'EDP s'écrit alors, en posant $v(t) = u(\xi(t), t)$:

$v'(t) = \frac{d}{dt} u(x_0 + ct, t) = x \cdot t = (x_0 + ct)t$, EDO

qui s'intègre en $v(t) = x_0 \frac{t^2}{2} + c \frac{t^3}{3} + v(0)$

$$v(0) = u(\xi(0), 0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

Donc $v(t) = x_0 \frac{t^2}{2} + c \frac{t^3}{3} + f(x_0)$

$$u(x_0 + ct, t) = x_0 \frac{t^2}{2} + c \frac{t^3}{3} + f(x_0)$$

$$\boxed{u(x, t) = (x - ct)\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + f(x - ct)}$$

Rq Comme l'EDP (4.1) est linéaire, on voit que $u(x,t)$ s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation homogène : $f(x - ct)$

et de $(x - ct)\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}$ solution particulière

de l'EDP avec second membre.

4.2 on utilise encore les caractéristiques pour se ramener à une EDO

$\dot{\xi}(t) = c$ les caractéristiques sont les droites
$\xi(t) = x_0 + ct$.
$v(t) = u(x_0 + ct, t)$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v^2 \\ v(0) = f(x_0) \end{cases}$$

qui s'intègre aussi car séparable

$$-\frac{v'}{v^2} = -1$$

on reconnaît la derivée de $\frac{1}{v}$

$$1/v(t) = -t + \frac{1}{v(0)} = -t + \frac{1}{f(x_0)}$$

(on a supposé $f(x_0) \neq 0$, sinon la solution de $v' = v^2$, $v(0) = 0$ est la solution triviale $v \equiv 0$)

donc $v(t) = \dfrac{1}{1/f(x_0) - t} = \dfrac{f(x_0)}{1 - t f(x_0)}$

ce qui donne

$$u(x_0 + ct, t) = \frac{f(x_0)}{1 - t f(x_0)}$$

$$\boxed{u(x, t) = \frac{f(x - ct)}{1 - t f(x - ct)}}$$

qui est définie tant que $t \neq \dfrac{1}{f(x - ct)}$

Si on suppose que $0 < f \leq M$
$u(x,t)$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{1}{M}[$ au moins.

4.3 on introduit les courbes caractéristiques

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \xi^2(t) \\ \xi(0) = x_0 \end{cases}$$ ce ne sont plus des droites

$\xi(t) \equiv 0$ si $x_0 = 0$

et $\xi(t) = \dfrac{1}{1/x_0 - t} = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ (expression qui convient aussi si $x_0 = 0$:-))

Alors $v(t) = u(\xi(t), t)$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} v'(t) = 0 \\ v(0) = u(x_0, 0) = f(x_0) \end{cases}$$

Donc $v(t) = \text{constante} = f(x_0)$

Ainsi $u\left(\dfrac{x_0}{1 - x_0 t}, t\right) = f(x_0)$

Donc pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, il faut trouver $x_0 \in \mathbb{R}$

tel que $\dfrac{x_0}{1 - x_0 t} = x$

$$x_0(1 + xt) = x$$

$$x_0 = \frac{x}{1 + xt}$$ qui existe si $xt \neq -1$

On a $\boxed{u(x,t) = f\left(\frac{x}{1+xt}\right)}$

qui est définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,t);\ xt = -1\}$

$u(x,t)$ est définie en dehors de l'hyperbole d'équation $xt = -1$.

On veut pouvoir définir $u(x,t=0)$ donc il faut choisir le domaine entre les deux hyperboles: le domaine hachuré en bleu sur la figure. $\{x>0, t>-1/x\} \cup \{x<0, t< -1/x\} \cup \{x=0\}$.