Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

Année Universitaire 2024-2025

TD 4. Introduction aux EDP.

Exercice 1. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. On considère l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$u_t + c\, u_x = 0 \tag{1}$$

L'inconnue est une fonction $((x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ et on note $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ pour alléger l'écriture. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

est solution de l'EDP (1). Quelle est la donnée initiale $u_{|t=0} = u(\cdot, 0)$? Comment déduit-on $u(\cdot, t)$ la solution à l'instant t à partir de la donnée initiale ?
Cette EDP est appelée *équation d'advection linéaire* ou équation de transport linéaire. la quantité c (homogène à une distance/temps) est la vitesse d'advection. Que se passe-t-il quand $c = 0$ (resp. $c > 0$, $c < 0$) ?

Exercice 2. Montrer que $u(x,t) = f(x/t)$ est solution pour $t > 0$ de l'EDP

$$u_t + (x/t)\, u_x = 0 \tag{2}$$

Ici on ne peut pas définir la donnée initiale à $t = 0$. Cependant on peut déduire la forme de la solution à l'instant t à partir de la solution à l'instant $t = 1$. Comment ? On dit que l'EDP (2) est self-similaire.

Exercice 3. Résoudre le problème de Cauchy suivant (c et r sont des constantes)

$$u_t + c\, u_x + r\, u = 0, \quad u(x, t = 0) = f(x).$$

Une telle équation est appelée *équation d'advection-réaction* linéaire.

Exercice 4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (c est une constante).

1. $$u_t + c\, u_x = x\, t, \quad u(x, t = 0) = f(x).$$

2. $$u_t + c\, u_x = u^2, \quad u(x, t = 0) = f(x).$$

   Remarquez que l'équation est non linéaire (à cause du terme u^2). On dit qu'elle est *semi-linéaire* car la non linéarité n'apparaît pas dans les termes dérivés. Précisez le domaine de définition de la solution dans le cas où $0 < f \leq M$.

3. $$u_t + x^2\, u_x = 0, \quad u(x, t = 0) = f(x).$$

   Précisez la région du plan (x,t) où la solution est définie.