L2 Mathématiques | Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 | Année universitaire 2021-2022

Contrôle continu 1
Lundi 7 mars 2022, 16h45-18h15

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments. En particulier, si vous utilisez un résultat du cours, énoncez et vérifiez toutes ses hypothèses.

Barême sur 22 points.

Exercice 1 (Cours & TD)

1. **(2 points)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f, et (x_n) une suite de points de I qui converge vers $x \in I$.
   (a) Montrer que si (f_n) converge uniformément, alors $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.
   (b) Donner un contre-exemple lorsque (f_n) ne converge pas uniformément.
2. **(2 points)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$. Démontrer que si (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, alors (f_n) converge uniformément.

Exercice 2 (10 points) Étudiez la convergence simple, uniforme, et uniforme sur les compacts des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous :

1. $f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \sin(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$;
2. $f_n(x) = e^{-2nx}(\cos(nx) - 1)$, pour $x \in [0, +\infty[$, puis pour $x \in [a, +\infty[$, $a > 0$;
3. $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$, pour $x \in [0, 1]$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé (on discutera suivant la valeur de α).

Exercice 3 (8 points) On pose $f_0(x) = 0$, et $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On va étudier la suite de fonctions (f_n).

1. *(Dans un premier temps la conclusion de cette question peut être admise afin d'avancer dans l'exercice)* Montrer que pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leq f_n(x) \leq 1 + \sqrt{1 + 4x}.$$
2. Montrer que (f_n) converge simplement, et expliciter <u>soigneusement</u> $\ell = \lim_{n\to+\infty} f_n$.
3. La suite (f_n) converge-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$? Sur $[1, 2]$?
4. Démontrer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$|f_{n+1}(x) - \ell(x)| \leq \frac{|f_n(x) - \ell(x)|}{2f_{n+1}(x)}.$$
5. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ (on pourra remarquer que $f_n - \ell$ est une fonction bornée pour tout $n \geq 1$).