Correction de l'examen de 1ère session
HAX705X

Mars 2022

1. Questions isolées (8 points)

a. Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Montrer que pour tout $x_o \in E$ et tout $r \geq 0$, on a

$$\sup_{\|x-x_o\|_E \leq r} \|T(x)\|_F \geq \|T\|\, r.$$

Voir le cours.

b. Soient E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $x \in E$. On pose $d(x, V) = \inf\{\|x - v\|; v \in V\}$. Montrer qu'il existe $v_o \in V$ tel que $\|x - v_o\| = d(x, V)$.

Voir le cours.

c. Soit $(\ell_2, \|-\|_2)$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable. Montrer que le sous-ensemble $K = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ |u_n| \leq e^{-n},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de ℓ_2.

Considérons une suite $(U^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de K : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^p = (U^p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $|U^p_n| \leq e^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(U^p_n)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée : elle possède donc une sous-suite convergente. En utilisant le procédé diagonal de Cantor, nous savons qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(U^{\varphi(p)}_n)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente : notons $V_n \in [-e^{-n}, e^{-n}]$ sa limite. Posons $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. On voit que pour tout $N \geq 0$, on a

$$\|U^{\varphi(p)}-V\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |U^{\varphi(p)}_n-V_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{N} |U^{\varphi(p)}_n-V_n|^2+4\sum_{N+1}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=0}^{N-1} |U^{\varphi(p)}_n-V_n|^2+\frac{4e^{-2(N+1)}}{1-e^{-2}} \leq \sum_{n=0}^{N-1} |U^{\varphi(p)}_n-V_n|^2+e^{-2N}.$$

La majoration précédente permet de voir que la suite $(U^{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans ℓ_2 vers $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. On pose $c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base Hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2([0, \pi])$.

On vérifie tout d'abord, au moyen des formules trigonométriques, que $< c_p, c_q >= \delta_{p,q}$, ainsi $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormée. Ensuite il faut montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ engendré par $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $L^2([0, \pi])$. Les étapes sont les suivantes :

— $\mathcal{A}$ est une sous algèbre unitaire séparante de $C([0, \pi])$.
— $\mathcal{A}$ est dense dans $(C([0, \pi]), \| - \|_\infty)$.
— $\mathcal{A}$ est dense dans $L^2([0, \pi])$ car $C([0, \pi])$ est dense dans $L^2([0, \pi])$ et que $\|f\|_2 \leq \sqrt{\pi}\,\|f\|_\infty$ pour tout $f \in C([0, \pi])$.

2. Exercice 1 (6 points)

Soit $(\ell_2, \| - \|_2)$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. À tout $t \geq 0$, on associe l'application linéaire $G_t : \ell_2 \to \ell_2$ définie par la relation : si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $G_t(u) = (g(tn)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que $G_t : \ell_2 \to \ell_2$ est une application linéaire continue.

(2) Soient $t_o \geq 0$ et $u \in \ell_2$. Calculer la limite $\lim_{t\to t_o} G_t(u) \in \ell_2$.

Posons $\|g\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |g(x)| < +\infty$. On remarque que

$$\|G_t(u)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |g(tn)u_n|^2 \leq (\|g\|_\infty)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2.$$

Cela implique que G_t est continue : on a $\|G_t\| \leq \|g\|_\infty$.

Maintenant on remarque que

$$\|G_t(u) - G_{t_o}(u)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |g(tn) - g(t_o n)|^2 \, |u_n|^2$$

tend vers 0 lorsque $t \to t_o$: c'est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On travaille maintenant avec la fonction $e(x) = \exp(-x)$ et l'application linéaire associée $E_t : \ell_2 \to \ell_2$.

(3) Montrer que $E_1 : \ell_2 \to \ell_2$ est un opérateur compact. *On pourra utiliser la question isolée* **c.**.

Soit $B = \{u \in \ell_2, \|u\|_2 \leq 1\}$ la boule unité de ℓ_2. Pour montrer que E_1 est un opérateur compact, il suffit de vérifier que l'image $E_1(B)$ est contenu dans un compact de ℓ_2. Considérons $u = (u_n) \in B$ et $E_1(u) = (e^{-n}u_n)$: comme $|u_n| \leq \|u\|_2 = 1$ on a, $|e^{-n}u_n| \leq e^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On voit donc que $E_1(B) \subset K$ où K est le compact de la question isolée **c**.

(4) Pour tout $u \in \ell_2$, on considère $t > 0 \mapsto \frac{1}{t}(E_t(u) - u) \in \ell_2$. Montrer que la limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(E_t(u) - u)$$

existe dans ℓ_2 si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < +\infty$. *On utilisera le fait que* $\theta(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - 1 + x)$ *est une fonction continue bornée sur* $[0, +\infty[$.

Considérons les formes linéaires (continues) $\pi_n : \ell_2 \to \mathbb{R} : \pi_n(u) = u_n$ si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la limite $v := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(E_t(u) - u)$ existe dans ℓ_2, alors

$$v_n = \pi_n(v) = \lim_{t\to 0^+} \pi_n\left(\frac{1}{t}(E_t(u) - u)\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(e^{-tn}u_n - u_n) = -nu_n$$

On voit donc que $v = (-nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 : \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < +\infty$.

Supposons maintenant que $v = (-nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. Considérons pour $t > 0$, la suite

$$V^t = \frac{1}{t}(E_t(u) - u) - v.$$

On a $V^t = (V_n^t)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$(\star) \qquad V_n^t = \left(\frac{e^{-tn} - 1}{t} + n\right) u_n = \left(\frac{e^{-tn} - 1 + tn}{tn}\right)(nu_n)$$

Notons $\Theta_t : \ell_2 \to \ell_2$ l'application linéaire associée à la fonction continue bornée $\theta : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - 1 + x)$ si $x > 0$, et $\theta(0) = 0$. Si $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $\Theta_t(w) = (\theta(tn)w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que $\Theta_0 : \ell_2 \to \ell_2$ est l'application linéaire identiquement nulle.

La relation $(\star)$ montre que $V^t = -\Theta_t(v)$. En utilisant le point (2), on peut conclure que

$$\lim_{t\to 0^+} V^t = -\lim_{t\to 0} \Theta_t(v) = -\Theta_0(v) = 0.$$

On a bien montré que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(E_t(u) - u)$ est égal à $v = (-nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$.

3. Exercice 2 (4 points)

Pour tout réel y, on note $E(y) \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et $[y] \in [0,1[$ sa partie décimale : $[y] = y - E(y)$. On considère un élément $\phi \in L^2([0,1])$ et on forme la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_n(x) = \phi([nx])$, $x \in [0,1]$.

(1) Montrer que pour tout $h \in C^0([0,1])$ on a $\langle \phi_n, h\rangle = \langle \phi, H_n\rangle$ avec

$$H_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{x+k}{n}\right), \quad x \in [0,1].$$

(2) Calculer $\|\phi_n\|_2$ pour $n \geq 1$.

(3) Montrer que la suite (ϕ_n) converge faiblement.

Fait en TD.

4. Exercice 3 (6 points)

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, que l'on muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On introduit, pour tout $f \in E$, la fonction $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1], \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ est continue.

(2) Montrer que $T : E \to E$ est une application linéaire continue.

(3) Quelle est la norme d'opérateur de T ?

(4) Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ une fonction polynomiale. Quelle est la limite de la suite $(T^n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(E, \|-\|_\infty)$?

(5) Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|-\|_\infty)$.

La question (1) est évidente. De plus $|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in [0,1]$. Cela implique que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq 1$. Si $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1, on constate que $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Ainsi $\|T\| = 1$. Dans les questions suivantes on utilisera que $\|T^n\| \leq \|T\|^n = 1$.

Considérons un polynôme $p(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$. Un calcul immédiat donne $T(p)(x) = \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} x^k$ et donc $T^n(p)(x) = \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k$, $\forall n \geq 0$. On remarque que

$$\|\sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k\|_\infty \leq \sum_{k=1}^p \frac{|a_k|}{(k+1)^n} \leq \frac{\sum_{k=1}^p |a_k|}{2^n}.$$

Ainsi $T^n(p)$ converge vers $a_0\mathbf{1} = p(0)\mathbf{1}$ lorsque $n \to \infty$.

Fixons $f \in E$. Montrons que la suite $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)\mathbf{1}$ dans $(E, \|-\|_\infty)$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit p un polynôme tel que $\|f - p\|_\infty \leq \epsilon$. Alors

$$\|T^n(f) - f(0)\mathbf{1}\|_\infty \leq \|T^n(f) - T^n(p)\|_\infty + \|T^n(p) - p(0)\mathbf{1}\|_\infty + \|p(0)\mathbf{1} - f(0)\mathbf{1}\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On remarque que $\|T^n(f) - T^n(p)\|_\infty = \|T^n(f-p)\|_\infty \leq \|f-p\|_\infty \leq \epsilon$, car $\|T^n\| \leq 1$. On a aussi $\|p(0)\mathbf{1} - f(0)\mathbf{1}\|_\infty = |p(0) - f(0)| \leq \|f-p\|_\infty \leq \epsilon$. On obtient donc

$$\|T^n(f) - f(0)\mathbf{1}\|_\infty \leq 2\epsilon + \|T^n(p) - p(0)\mathbf{1}\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \|T^n(p) - p(0)\mathbf{1}\|_\infty = 0$ d'après la question précédente, on obtient qu'à partir d'un certain rang on a $\|T^n(f) - f(0)\mathbf{1}\|_\infty \leq 3\epsilon$.

On a bien montré que $\lim_{n\to\infty} \|T^n(f) - f(0)\mathbf{1}\|_\infty = 0$