EXAMEN 1ÈRE SESSION
HAX705X

—

10 JANVIER 2022

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

1. Questions isolées (8 points)

a. Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Montrer que pour tout $x_o \in E$ et tout $r \geq 0$, on a

$$\sup_{\|x-x_o\|_E \leq r} \|T(x)\|_F \geq \|T\|\, r.$$

b. Soient E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $x \in E$. On pose $d(x,V) = \inf\{\|x-v\|; v \in V\}$. Montrer qu'il existe $v_o \in V$ tel que $\|x - v_o\| = d(x,V)$.

c. Soit $(\ell_2, \|-\|_2)$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable. Montrer que le sous-ensemble $K = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ |u_n| \leq e^{-n},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de ℓ_2.

d. On pose $c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base Hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2([0,\pi])$.

2. Exercice 1 (6 points)

Soit $(\ell_2, \|-\|_2)$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable. Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. À tout $t \geq 0$, on associe l'application linéaire $G_t : \ell_2 \to \ell_2$ définie par la relation : si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $G_t(u) = (g(tn)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que $G_t : \ell_2 \to \ell_2$ est une application linéaire continue.
(2) Soient $t_o \geq 0$ et $u \in \ell_2$. Calculer la limite $\lim_{t\to t_o} G_t(u) \in \ell_2$.

On travaille maintenant avec la fonction $e(x) = \exp(-x)$ et l'application linéaire associée $E_t : \ell_2 \to \ell_2$.

(3) Montrer que $E_1 : \ell_2 \to \ell_2$ est un opérateur compact. *On pourra utiliser la question isolée* **c.**.
(4) Pour tout $u \in \ell_2$, on considère $t > 0 \mapsto \frac{1}{t}(E_t(u) - u) \in \ell_2$. Montrer que la limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(E_t(u) - u)$$

existe dans ℓ_2 si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < +\infty$. *On utilisera le fait que* $\theta(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - 1 + x)$ *est une fonction continue bornée sur* $[0,+\infty[$.

Tournez la page S. V. P.

3. Exercice 2 (4 points)

Pour tout réel y, on note $E(y) \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et $[y] \in [0, 1[$ sa partie décimale : $[y] = y - E(y)$. On considère un élément $\phi \in L^2([0, 1])$ et on forme la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_n(x) = \phi([nx])$, $x \in [0, 1]$.

(1) Montrer que pour tout $h \in C^0([0, 1])$ on a $\langle \phi_n, h\rangle = \langle \phi, H_n\rangle$ avec

$$H_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{x+k}{n}\right), \quad x \in [0, 1].$$

(2) Calculer $\|\phi_n\|_2$ pour $n \geq 1$.

(3) Montrer que la suite (ϕ_n) converge faiblement.

4. Exercice 3 (6 points)

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, que l'on muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On introduit, pour tout $f \in E$, la fonction $T(f) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0, 1], \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ est continue.

(2) Montrer que $T : E \to E$ est une application linéaire continue.

(3) Quelle est la norme d'opérateur de T ?

(4) Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ une fonction polynomiale. Quelle est la limite de la suite $(T^n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(E, \| - \|_\infty)$?

(5) Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \| - \|_\infty)$.