Corrigé CC1.

Ex 1 l'erreur de consistance $\varepsilon(h) := y(t_0+h) - y_1$

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y_0 - \frac{h}{2}\left\{f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y_0 + h f(t_0,y_0))\right\}$$

$\varepsilon(h) = O(h^3)$ (voir détails exo 5 TD1).

2- C'est un schéma à un pas : on peut l'écrire sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n; h)$$

avec $\Phi(t_n, \cdot, h)$ lipschitzienne (voir détails dans l'exo 5 du TD1).

D'après le théorème de convergence des schémas à un pas, le schéma est convergent et puisque l'erreur de consistance est $O(h^3)$

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \text{ quand } h \to 0.$$

Ex 2

1- le schéma de Nyström est un schéma multipas explicite : il s'écrit sous la forme :

$$y_{n+3} - y_{n+1} = h\left(\frac{7}{3} f_{n+2} - \frac{2}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n\right)$$

le polynôme caractéristique est :

$$\rho(z) = z^3 - z = z(z^2-1) = z(z-1)(z+1)$$

les racines sont $0, 1, -1$ et sont simples de module ≤ 1

le schéma est stable.

Rq : on peut aussi voir que si $f \equiv 0$ le schéma donne

$$y_{n+1} = y_{n-1} \quad \text{donc} \quad y_n \in \{y_0, y_1\}$$

donc y_n est borné par $\max |y_0|, |y_1|$.

2- Pour tester la consistance du schéma,

Soit $\sigma(z) = \frac{7}{3} z^2 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{3}$

vérifions que $\rho'(1) = \sigma(1)$.

$$\rho'(z) = 3z^2 - 1 \qquad \rho'(1) = 2$$

$$\sigma(1) = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$$

Donc le schéma est consistant d'après le cours :
$\varepsilon(h) = o(h)$.

3- Pour estimer l'ordre du schéma, il faut effectuer un développement de Taylor de l'erreur de consistance.

$$\varepsilon(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - h\left\{\frac{7}{3} f(t_n, y(t_n)) - \frac{2}{3} f(t_n-h, y(t_n-h)) + \frac{1}{3} f(t_n-2h, y(t_n-2h))\right\}$$

en utilisant l'équa. diff : $y' = f(t,y)$

$$\varepsilon(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - h\left\{\frac{7}{3} y'(t_n) - \frac{2}{3} y'(t_n-h) + \frac{1}{3} y'(t_n-2h)\right\}$$

$$= \cancel{y(t_n)} + \cancel{h y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''} + \cancel{\frac{h^3}{6} y'''} - \left(\cancel{y(t_n)} - \cancel{h y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''} - \cancel{\frac{h^3}{6} y'''}\right) + O(h^4)$$

$$- \frac{7h}{3} \cancel{y'(t_n)} \quad + \frac{2h}{3}\left\{\cancel{y'(t_n)} - \cancel{h y''} + \cancel{\frac{h^2}{2} y'''}\right\} - \frac{h}{3}\left\{\cancel{y'(t_n)} - \cancel{2h y''} + \cancel{2h^2 y'''}\right\} + O(h^4)$$

$\varepsilon(h) = O(h^4)$ après simplifications. ∎

4 - D'après les questions 1-2 le schéma multipas est stable et consistant donc il est convergent, en vertu du théorème de convergence des schémas multipas.
Comme l'erreur de consistance est en $O(h^4)$ le schéma est d'ordre 3.

$\boxed{E}$

Barême indicatif :

EX 1 1) 3 pts
- développt Taylor $y(t_n+h)$ 1pt
- $y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$ 1pt
- Taylor à 2 variables pour y_1 1pt

2) 2 pts
- 1pt schéma à un pas
- 1pt théorème de convergence

EX2

1) stabilité par les racines du polynôme caract. ou par l'étude la suite 1 pt

2) consistance 1 pt

3) développement de Taylor 2 pt

4) th de convergence et ordre 1 pt