



Session : contrôle continu

Date : 08/03/2022

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, MSM

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 1h10

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

**Exercice 1.** (5 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

On considère le schéma des trapèzes explicites.

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))}{2} \right\}$$

où l'on note  $t_n = n \cdot h$  où  $h > 0$  désigne le pas de temps, et  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $f$  est suffisamment régulière et globalement lipschitzienne de rapport  $L$ .

1. Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma en fonction de  $h$ .
2. On fixe  $T > 0$ . Estimer l'ordre de grandeur de  $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$  en fonction de  $h$ . Est-ce que le schéma est convergent ? Si oui, quel est son ordre de convergence ? Justifiez soigneusement vos réponses.

**Exercice 2** (5 pts) Soit l'équation différentielle  $y'(t) = f(t, y(t))$ . On note  $t_n = n \cdot h$  où  $h > 0$  désigne le pas de temps, et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $f_k = f(t_k, y_k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Le schéma de Nystrom est donné par

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \left( \frac{7}{3}f_n - \frac{2}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2} \right).$$

C'est un schéma multipas explicite qui permet de calculer  $y_{n+1}$  étant donnés  $y_n, y_{n-1}$  et  $y_{n-2}$ .

1. Montrer que le schéma de Nystrom est stable ( i.e. la suite  $y_n$  reste bornée lorsque  $f = 0$ ).
2. Montrer que le schéma de Nystrom est consistant.
3. Montrer que l'erreur de consistance est  $\mathcal{O}(h^4)$ .  
Indication : développer  $y(t_n + h) - y(t_n - h) - h \left( \frac{7}{3}y'(t_n) - \frac{2}{3}y'(t_n - h) + \frac{1}{3}y'(t_n - 2h) \right)$ .
4. Est-ce que le schéma est convergent ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez vos réponses.