

TD3

Ex1

1. on met le schéma sous forme d'un schéma multiplicatif:

$$y_{m+1} - y_m = h \left\{ \frac{1}{2} f_m + \frac{1}{2} f_{m+1} \right\}$$

pour étudier la stabilité on étudie les racines de $p(z) = z - 1$

il y a une seule racine $z = 1$ et elle est simple donc le schéma est stable.

Rq on peut aussi prendre $f \equiv 0$ et regarder

$$y_{m+1} - y_m = 0 \quad \text{on trouve que la suite}$$

$(y_m)_m$ est constante $= y_0$ donc elle est bornée!

2. l'erreur de consistance est:

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h \left\{ \frac{1}{2} f(t_0, y_0) + \frac{1}{2} f(t_0+h, y(t_0+h)) \right\}$$

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h \left\{ \frac{1}{2} y'(t_0) + \frac{1}{2} y'(t_0+h) \right\}$$

on a utilisé $y'(t) = f(t, y(t))$.

ensuite on effectue un développement de Taylor:

$$\varepsilon(h) = \cancel{y(t_0)} + h \cancel{y'(t_0)} + \frac{h^2}{2} \cancel{y''(t_0)} + O(h^3)$$

$$- \cancel{y(t_0)} - \frac{h}{2} \cancel{y'(t_0)} - \frac{h}{2} \left\{ \cancel{y'(t_0)} + h \cancel{y''(t_0)} + O(h^2) \right\}$$

$$\varepsilon(h) = O(h^3) \quad \square$$

3. D'après le théorème ou en cours,
un schéma stable et consistant est convergent.
De plus, comme l'erreur de consistance est $O(h^3)$
le schéma est d'ordre deux

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0. \\ \text{pour } T > 0 \text{ fixé.}$$

Ex 2

1. suivons l'indication :

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t) dt$$

utilisons donc la quadrature de Simpson :

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a) \left\{ \frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right\}$$

(qui est exacte pour f polynôme de degré ≤ 3 .)

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) \approx 2h \left\{ \frac{1}{6} y'(t_{n-1}) + \frac{4}{6} y'(t_n) + \frac{1}{6} y'(t_{n+1}) \right\} \\ \approx \frac{2h}{6} \left\{ f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + 4f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{6} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$$

Donc le schéma, avec les mêmes coefficients :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{2h}{6} \left\{ f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1} \right\}$$

c'est un schéma implicite.

2 - Pour calculer y_{n+1} on remarque que

$y_{n+1} = g(y_{n+1})$ avec la fonction g définie ainsi :

$$g: y \longmapsto y_{n-1} + \frac{2h}{6} \left\{ f(t_{n-1}+2h, y) + 4f(t_{n-1}+h, y) + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right\}$$

on vérifie aisément que g est contractant: (y_{n-1}, t_n fixés)

$$g(y) - g(z) = \frac{2h}{6} \left\{ f(t_{n-1} + 2h, y) - f(t_{n-1} + 2h, z) \right\}$$

$$|g(y) - g(z)| \leq \frac{2h}{6} L |y - z| \quad \text{car } f(t, \cdot) \text{ est } L\text{-lipschitz}$$

$$|g(y) - g(z)| \leq \frac{hL}{3} |y - z|$$

donc pour $h < \frac{3}{L}$ g est contractant.

On peut donc calculer y_{n+h} par la méthode des approximations successives, c'est à dire comme limite de la suite des itérées

$$g(y_n), g \circ g(y_n), g \circ g \circ g(y_n), \dots$$

3 - Ce schéma de Milne est un schéma multiple, on étudie les racines du polynôme caractéristique.

$$p(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

les racines $+1, -1$ sont simples et de module < 1 donc le schéma est stable.

4 - Effectuons des développements de Taylor autour du point t_n .

$$E(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - \frac{2h}{6} \left\{ f(t_n+h, y(t_n+h)) + 4f(t_n, y(t_n)) + f(t_n-h, y(t_n-h)) \right\}$$

$$E(h) = y(t_n+h) - y(t_n-h) - \frac{2h}{6} \left\{ y'(t_n+h) + 4y'(t_n) + y'(t_n-h) \right\}$$

on a utilisé le fait que $y'(t) = f(t, y(t))$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) &= y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \frac{h^4}{24} y^{(iv)}(t_n) + O(h^5) \\
&- \left(y(t_n) - h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \frac{h^4}{24} y^{(iv)}(t_n) + O(h^5) \right) \\
&- \frac{h}{3} \left(y'(t_n) + h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(t_n) + \frac{h^3}{6} y^{(iv)}(t_n) \right) + O(h^5) \\
&- \frac{4h}{3} y'(t_n) \\
&- \frac{h}{3} \left(y'(t_n) - h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(t_n) - \frac{h^3}{6} y^{(iv)}(t_n) \right) + O(h^5) \\
\varepsilon(h) &= O(h^5)
\end{aligned}$$

5. D'après le théorème du cours, le schéma multi-passes est stable et consistant donc il est convergent.

Comme l'erreur de consistance est en $O(h^5)$ le schéma est d'ordre 4.

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^4) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \text{ pour } T > 0 \text{ fixé.}$$

Corrigé : A-stabilité de la méthode BDF2 et application

1. Étude de la stabilité

On applique la méthode BDF2 à l'équation test de Dahlquist

$$y' = \lambda y.$$

Le schéma BDF2 est

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Comme $f(t, y) = \lambda y$, on obtient

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = \lambda y_{n+1}.$$

En multipliant par $2h$:

$$3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 2h\lambda y_{n+1}.$$

On introduit la variable

$$z = \lambda h.$$

On obtient alors

$$(3 - 2z)y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 0.$$

Facteur d'amplification

On cherche une solution sous la forme

$$y_n = \xi^n.$$

Alors

$$y_{n+1} = \xi^{n+1}, \quad y_{n-1} = \xi^{n-1}.$$

En substituant dans la relation :

$$(3 - 2z)\xi^{n+1} - 4\xi^n + \xi^{n-1} = 0.$$

On divise par ξ^{n-1} :

$$(3 - 2z)\xi^2 - 4\xi + 1 = 0.$$

Le facteur d'amplification ξ vérifie donc

$$(3 - 2z)\xi^2 - 4\xi + 1 = 0.$$

Domaine de stabilité

La méthode est stable si les solutions ξ de cette équation vérifient

$$|\xi| \leq 1,$$

et les racines de module 1 sont simples.

Supposons maintenant

$$\Re(z) < 0.$$

Dans ce cas

$$3 - 2z$$

a une partie réelle strictement positive.

On peut réécrire l'équation sous la forme

$$\xi^2 - \frac{4}{3 - 2z}\xi + \frac{1}{3 - 2z} = 0.$$

On observe que lorsque $\Re(z) < 0$, on a

$$\left| \frac{1}{3 - 2z} \right| \leq \frac{1}{3} < 1.$$

L'analyse des racines montre alors que les deux racines sont situées strictement à l'intérieur du disque unité.

Ainsi

$$|\xi| < 1.$$

La méthode est donc stable pour tout

$$\Re(z) < 0.$$

Conclusion

Le domaine de stabilité contient tout le demi-plan gauche

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}.$$

Par définition, une méthode possédant cette propriété est dite *A-stable*.

La méthode BDF2 est donc **A-stable**.

Avec la méthode BDF2, même avec un pas relativement grand, la solution numérique reste bornée contrairement à ce qui pourrait se produire avec une méthode explicite.

C'est précisément pour cette raison que les méthodes *implicites A-stables* comme BDF2 sont particulièrement adaptées aux **équations raides**.