

EXAMEN FINAL

(10/01/2022)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

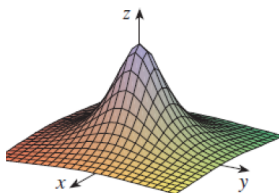
- (a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.
- (b) A est-elle orthogonale ?
- (c) Trouver les valeurs propres de A .
- (d) Déterminer les vecteurs propres correspondants (c-à-d, les solutions avec chaque valeur propre).

Problème 2. Soit $z = 8 + 6i$.

- (a) Calculer z^2 et $\frac{z}{\bar{z}}$ où \bar{z} est le conjugué de z .
- (b) Trouver les racines carrées de z dans \mathbb{C} .

Problème 3. Soit $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

- (a) Déterminer les extrema locaux de $f(x, y)$.
- (b) La surface-graphe S_f contient-elle l'origine ?
- (c) Tracer les courbes de niveau $f(x, y) = \lambda$ avec $0 < \lambda \leq 1$.
- (d) S_f admet-elle la représentation ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S_f (justifiez votre réponse)



Problème 4. Déterminer si la forme différentielle $w = 3x^2ydx + x^3dy$ est exacte et, si elle l'est, chercher f tel que $df = w$.

Problème 5. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \left(x - \frac{y^2}{3}\right)dx + xdy$$

où C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 3x + 4$ joignant les points $(0, -2)$ et $(0, 2)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

Problème 6. Résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 3t^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$