**Université de Montpellier** **Année Universitaire 2023-2024**
**Faculté des Sciences**
**Mathématiques et Mécanique**

**DM à rendre en binôme le 22 avril dans votre groupe de TD.**

---

Soit une fonction $H : (q,p) \in \mathbb{R}^2 \mapsto H(q,p) \in \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose aussi que les dérivées partielles premières et secondes de $H$ sont bornées. Soit le système différentiel suivant (dit Hamiltonien)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}(t) & = & \frac{\partial H}{\partial p}(q(t),p(t)) \\ \dot{p}(t) & = & -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t),p(t)) \end{array} \right. \tag{1}$$

On suppose dans la suite que (1) admet une solution globale unique pour toute donnée initiale $(q(0),p(0)) = (q_0,p_0) \in \mathbb{R}^2$.

---

1. Montrer que $t \mapsto H(q(t),p(t))$ est constante sur les solutions de (1). On dit que $H$ est conservée par le mouvement, c'est une *intégrale première.*
2. On note $(q_0,p_0) = (q(0),p(0))$ la condition initiale de (1). Soit $t$ un réel, on note
$$\begin{array}{rccc} \phi_t : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (q_0,p_0) & \mapsto & (q(t),p(t)) \end{array}$$
l'application qui à la condition initiale associe la valeur à l'instant $t$ de la solution de (1). L'ensemble des applications $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est appelé le *flot* de l'équation différentielle. *On admettra* que pour tout $t$, $\phi_t$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $A$ une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$. On note $|A| = \int_A dxdy$ l'aire de $A$.
Démontrer que $|\phi_t(A)| = |A|$. *On dit que le flot conserve les aires.*
*Indication.* Montrer que le déterminant jacobien de $\phi_t$ est constant.
3. Beaucoup de systèmes dynamiques de la mécanique peuvent être écrits sous la forme (1). Considérons la loi de Newton qui décrit le mouvement d'un point matériel de masse $m$ repéré par sa position $x(t) \in \mathbb{R}^d$ soumis à l'action d'une force $F$ ne dépendant que de sa position : $m\,\ddot{x} = F(x)$. On suppose que la force $F(x) = -\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ dérive d'un potentiel $V$. En posant $q(t) = x(t)$ et $p(t) = mv = m\dot{x}(t)$ écrire la loi de Newton sous la forme (1) et préciser la fonction $H(q,p)$ dans ce cas. A quel principe mécanique correspond le fait que $H$ soit une intégrale première ?
4. Pour cette question seulement, on considère le cas particulier $H(q,p) = \frac{1}{2}(q^2+p^2)$ où $q,p$ sont des réels. Ecrire l'équation différentielle du second ordre correspondante. Quel système mécanique décrit elle ?
On veut résoudre numériquement (1) par un schéma numérique. On prend un pas de temps $h > 0$. On pose $t_n = nh,\ n \in \mathbb{N}$, et on appelle $q_n, p_n$ les valeurs calculées par le schéma numérique au cours des itérations, censées approcher $q(t_n), p(t_n)$. On note $\phi_n : (q_0,p_0) \mapsto (q_n,p_n)$ le flot discret associé. Soit $A$ une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'avec le schéma d'Euler explicite l'aire de $\phi_n(A)$ augmente au cours des itérations tandis qu'avec le schéma d'Euler implicite elle diminue. Est-ce que la fonction $H(q_n,p_n)$ reste constante au cours des itérations ?
5. Soit le schéma suivant "implicite-explicite"
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} p_{n+1} & = & p_n & -h & \frac{\partial H}{\partial q}(q_n,p_{n+1}) \\ q_{n+1} & = & q_n & +h & \frac{\partial H}{\partial p}(q_n,p_{n+1}) \end{array} \right. \tag{2}$$

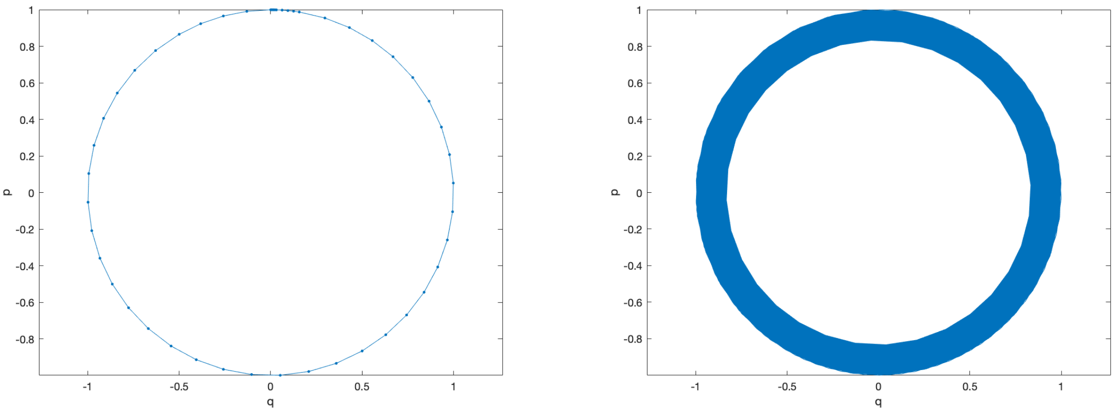


FIGURE 1 – schéma `ode45`. gauche : simulation sur une période, droite : sur 1000 périodes

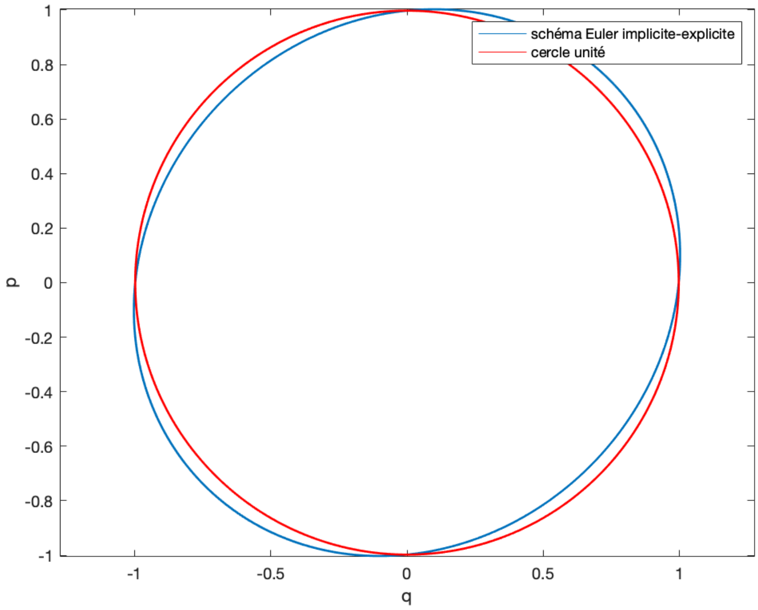


FIGURE 2 – simulation sur 1000 périodes avec le schéma (2)

pour l'équation (1) générale. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que pour $h$ assez petit, il est bien défini. Montrer qu'il conserve exactement les aires. De quel ordre est ce schéma ?

6. On a utilisé le solveur de haute précision (Dormand-Prince d'ordre 5) de Matlab `ode45` pour calculer numériquement les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}(t) & = & p(t) \\ \dot{p}(t) & = & -q(t) \end{array} \right. \tag{3}$$

La solution est tracée sur la figure 1. On a aussi utilisé le schéma (2) avec un pas grossier $h = 0.1$. La solution est tracée sur la figure 2. Commentez les figures.