

DM à rendre individuellement ou en binôme exclusivement sous forme papier le lundi 13 avril dans votre groupe de TD.

On soignera particulièrement la *concision* de la rédaction ainsi que la présentation. Les brouillons, travaux raturés ou mal présentés et trop longs ne seront pas corrigés. Les rédactions en \LaTeX seront appréciées.

Soit $T > 0$ et $v : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \mapsto v(x, t) \in \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée partielle v_x par rapport à la variable x et vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) v et $v_x := \frac{\partial v}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, T]$,

(H2) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $|v(x, t)| \leq C(1 + |x|)$.

1. Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ fixé. On considère l'équation différentielle ordinaire $y'(s) = v(y(s), s)$ avec la condition initiale $y(t) = x$. Montrer que la solution maximale de cette équation différentielle est bien définie sur $[0, T]$ tout entier.

(Indication : utiliser le lemme de Gronwall pour majorer $|y(s)|$).

Dans ce qui suit, on notera $s \mapsto X(s, t, x)$ cette solution qui vérifie donc $\frac{\partial X}{\partial s} = v(X(s, t, x), s)$ et $X(t, t, x) = x$. Notez bien que l'ordre des arguments dans $X(s, t, x)$ est important. $X(s, t, x)$ désigne la position à l'instant s de la courbe intégrale passant par x à l'instant t .

2. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$
3. Dans cette question seulement on admettra le théorème de différentiabilité vis à vis de la condition initiale : pour tout $t \in [0, T]$ fixé, la fonction $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial X}{\partial x}(s, t, x)$ pour tous $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. De plus la fonction $z : s \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(s, t, x)$ est l'unique solution sur $[0, T]$ du problème de Cauchy linéaire :

$$z'(s) = v_x(X(s, t, x), s) z(s), \quad z(t) = 1.$$

Enfin $(s, x) \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(s, t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

On demande de montrer que pour tous $(s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) (s, t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right) (s, t, x)$$

4. Montrer que, pour tous $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$, l'application $X(s, t, \cdot) : x \mapsto X(s, t, x)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur lui-même.
5. Montrer que $(s, t, x) \mapsto X(s, t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$.
 Indication : pour montrer que $X(s, t, x)$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable t , on pourra remarquer que $t \mapsto X(s, t, x)$ est solution de l'équation $F(t, y(t)) = 0$ où $F(t, y) := X(t, s, y) - x$ et utiliser le théorème des fonctions implicites.
6. On note $p(x, t) := X(0, t, x)$ le pied de la caractéristique passant par x à l'instant t . Montrer que pour tous $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$,

$$p_t(x, t) + v(x, t) p_x(x, t) = 0.$$

7. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Montrer que $u(x, t) := f(X(0, t, x))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ et vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$u_t + v(x, t) u_x = 0$$

ainsi que la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$.