Université de Montpellier **Année Universitaire 2024-2025**
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

DM à rendre individuellement ou *en binôme* sous forme papier le lundi 14 avril dans votre groupe de TD.
On soignera particulièrement la rigueur de la rédaction ainsi que la présentation. Les brouillons, travaux raturés ou mal présentés ne seront pas corrigés.

Soit $T > 0$ et $v : (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \mapsto v(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée partielle v_x par rapport à la variable x et vérifiant les hypothèses suivantes :
(H1) v et $v_x := \frac{\partial v}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0,T]$,
(H2) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $\quad |v(x,t)| \le C\,(1+|x|)$.

1. Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$. On considère l'équation différentielle ordinaire $y'(s) = v(y(s),s)$ avec la condition initiale $y(t) = x$. Montrer que la solution maximale de cette équation différentielle est bien définie sur $[0,T]$ tout entier.
(*Indication* : utiliser le lemme de Gronwall pour majorer $|y(s|)$.
Dans ce qui suit, on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette solution qui vérifie donc $\frac{\partial X}{\partial s} = v(X(s,t,x),s)$ et $X(t,t,x) = x$.
2. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$, $X\left(t_3, t_2, X(t_2,t_1,x)\right) = X(t_3,t_1,x)$
3. Dans cette question on *admettra* le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la donnée initiale : *pour tout* $t \in [0,T]$ *fixé, la fonction* $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ *admet une dérivée partielle* $\frac{\partial X}{\partial x}(s,t,x)$ *pour tous* $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. *De plus la fonction* $z : s \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(s,t,x)$ *est l'unique solution sur* $[0,T]$ *du problème de Cauchy linéaire :*
$$z'(s) = v_x(X(s,t,x),s)\,z(s), \quad z(t) = 1.$$
Enfin $(s,x) \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(s,t,x)$ *est continue sur* $[0,T] \times \mathbb{R}$.
On demande de montrer que pour tous $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)(s,t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)(s,t,x)$$
4. Montrer que, pour tous $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$, l'application $X(s,t,\cdot) : x \mapsto X(s,t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
5. Montrer que $(s,t,x) \mapsto X(s,t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}$.
Indication : pour montrer que $X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable t, on pourra remarquer que $t \mapsto X(s,t,x)$ est solution de l'équation $F(t,y(t)) = 0$ où $F(t,y) := X(t,s,y) - x$ et utiliser le théorème des fonctions implicites.
6. On note $p(t,x) = X(0,t,x)$. Montrer que pour tous $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,
$$p_t(x,t) + v(x,t)\,p_x(x,t) = 0.$$
7. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $u(x,t) := f(X(0,t,x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0,T]$ et vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles :
$$u_t + v(x,t)u_x = 0$$
ainsi que la condition initiale $u(x,0) = f(x)$.