Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

Année Universitaire 2023-2024

TD 3

Exercice 1 (d'après examen janvier 2020) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$

On considère le schéma des trapèzes implicites, (appelé aussi schéma de Crank-Nicolson).

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right\}$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Est-ce que le schéma est stable ?
2. Montrer que l'erreur de consistance du schéma est en $\mathcal{O}(h^3)$.
3. Est-ce que le schéma est convergent ? Quel est l'ordre de convergence ?

Exercice 2 (d'après examen janvier 2020) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k = f(t_k, y_k)$. le schéma de Milne est donné par

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{2h}{6} \left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1} \right).$$

C'est un schéma multipas implicite qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n et y_{n-1}.

1. Expliquer la valeur des coefficients du schéma. Indication : $y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t)\, dt$
2. On suppose que la fonction $y \mapsto f(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à y de rapport L :

   $$\forall t, \quad |f(t, z) - f(t, y)| \leq L|z - y|.$$

   Etant donnés y_0, f_0, f_1, on définit la fonction

   $$y \mapsto g(y) = y_0 + \frac{2h}{6} \left(f(t_0 + 2h, y) + 4f_1 + f_0 \right).$$

   Montrer que la fonction g est contractante pour h suffisamment petit. En déduire une méthode simple pour calculer y_{n+1} connaissant les valeurs de y_n et y_{n-1} dans le schéma de Milne.
3. Montrer que la méthode de Milne est stable ?
4. Montrer que l'erreur de consistance est en $\mathcal{O}(h^5)$.
   Indication : développer $y(t_n + h) - y(t_n - h) - \frac{2h}{6} \left(y'(t_n + h) + 4y'(t_n) + y'(t_n - h) \right).$
5. Est-ce que le schéma est convergent ? Soit $T > 0$ une durée fixée. Quelle est l'ordre de l'erreur globale $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$?