

TD 3

**Exercice 1** (d'après examen janvier 2020) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \quad (1)$$

On considère le schéma des trapèzes implicites, (appelé aussi schéma de Crank-Nicolson).

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right\}$$

où l'on note  $t_n = n \cdot h$  où  $h > 0$  désigne le pas de temps, et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Est-ce que le schéma est stable ?
2. Montrer que l'erreur de consistance du schéma est en  $\mathcal{O}(h^3)$ .
3. Est-ce que le schéma est convergent ? Quel est l'ordre de convergence ?

**Exercice 2** (d'après examen janvier 2020) Soit l'équation différentielle  $y'(t) = f(t, y(t))$ . On note  $t_n = n \cdot h$  où  $h > 0$  désigne le pas de temps, et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $f_k = f(t_k, y_k)$ . le schéma de Milne est donné par

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{2h}{6} (f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}).$$

C'est un schéma multipas implicite qui permet de calculer  $y_{n+1}$  étant donnés  $y_n$  et  $y_{n-1}$ .

1. Expliquer la valeur des coefficients du schéma. Indication :  $y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} y'(t) dt$
2. On suppose que la fonction  $y \mapsto f(t, y)$  est lipschitzienne par rapport à  $y$  de rapport  $L$  :

$$\forall t, \quad |f(t, z) - f(t, y)| \leq L|z - y|.$$

Etant donnés  $y_0, f_0, f_1$ , on définit la fonction

$$y \mapsto g(y) = y_0 + \frac{2h}{6} (f(t_0 + 2h, y) + 4f_1 + f_0).$$

Montrer que la fonction  $g$  est contractante pour  $h$  suffisamment petit. En déduire une méthode simple pour calculer  $y_{n+1}$  connaissant les valeurs de  $y_n$  et  $y_{n-1}$  dans le schéma de Milne.

3. Montrer que la méthode de Milne est stable ?
4. Montrer que l'erreur de consistance est en  $\mathcal{O}(h^5)$ .  
Indication : développer  $y(t_n + h) - y(t_n - h) - \frac{2h}{6} (y'(t_n + h) + 4y'(t_n) + y'(t_n - h))$ .
5. Est-ce que le schéma est convergent ? Soit  $T > 0$  une durée fixée. Quelle est l'ordre de l'erreur globale  $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$  ?

### Exercice 3 : A-stabilité de la méthode BDF2 et application à une équation raide

On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

La méthode BDF2 (Backward Differentiation Formula d'ordre 2) est donnée par (cf exercice 4 TD2)

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, y_{n+1}),$$

où  $h$  est le pas de temps.

#### Étude de la stabilité

On applique la méthode à l'équation test de stabilité de Dahlquist

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

dont la solution exacte  $y(t) = y_0 \exp(\lambda t)$ . Lorsque  $\Re(\lambda) < 0$ , il est évident que  $y(t)$  tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$ . La moindre des choses est de s'assurer que le schéma numérique donne une solution au moins *bornée*.

1. Montrer que la suite  $(y_n)$  vérifie la relation de récurrence

$$(3 - 2z)y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 0,$$

où  $z = \lambda h$ .

2. En cherchant une solution sous la forme  $y_n = \xi^n$ , montrer que le facteur d'amplification  $\xi$  satisfait

$$(3 - 2z)\xi^2 - 4\xi + 1 = 0.$$

3. On appelle *domaine de stabilité absolue* l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tels que toutes les racines  $\xi$  vérifient  $|\xi| \leq 1$  et que celles de module 1 soient simples.

Montrer que si  $\Re(z) < 0$ , alors  $|\xi| < 1$  pour les solutions de l'équation caractéristique.

On dit que la méthode BDF2 est *A-stable*. C'est un critère important qui signifie que la solution numérique reste au moins bornée même si le pas de temps n'est pas suffisamment petit. Lorsque l'équation différentielle est *raide* c'est très important. Les méthodes explicites demandent souvent des pas de temps déraisonnablement petits pour garantir cette propriété naturelle. Dahlquist a prouvé que les méthodes multipas A-stables sont nécessairement d'ordre  $p \leq 2$ .