MODULE HAX201X
ANNÉE 2021/2022

Correction des exercices « ♠ » de la feuille 3

Exercice 29

À toute suite $a = (a_n)$ de termes positifs on associe $R(a) := \limsup (a_n)^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty]$.

Calculer $R(a)$ pour les suites $a_n = n^\alpha$, $a_n = q^n$ et $a_n = q^{n^2}$.

La suite $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{\alpha}{n}\ln(n))$ converge vers $\exp(0) = 1$. Donc $R(n^\alpha) = 1$.

La suite $(q^n)^{\frac{1}{n}} = q$ est constante donc $R(q^n) = q$.

Comme $(q^{n^2})^{\frac{1}{n}} = q^n$, on voit que $R(q^{n^2}) = 0$ si $q \in [0, 1[$, $R(q^{n^2}) = 1$ si $q = 1$ et $R(q^{n^2}) = +\infty$ si $q > 1$.

Montrer que $R(a) = 0$ si et seulement si $\forall r > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n r^n = 0$.

$R(a) := \limsup (a_n)^{\frac{1}{n}}$ est égale à la limite de la suite décroissante $A_n := \sup\{(a_k)^{\frac{1}{k}},\ k \geq n\}$. Alors $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ est équivalent au fait que $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, A_n \leq \epsilon$. Mais

$$A_N \leq \epsilon \iff a_k \leq \epsilon^k,\ \forall k \geq N.$$

Finalement on voit que

$$R(a) = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \text{la suite } (a_k\epsilon^{-k}) \text{ est bornée} \iff \forall r > 0, \lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0.$$

La dernière équivalence utilise le fait que $a_n r^n = \frac{1}{2^n} V_n$ avec $V_n = a_n \left(\frac{1}{2r}\right)^{-n}$ une suite bornée.

Montrer que $R(a) = +\infty$ si et seulement si $\forall r > 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée.

Par définition, $\limsup (a_n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$ si et seulement la suite $((a_n)^{\frac{1}{n}})$ n'est pas bornée, c'est à dire $\forall C > 0$, $\exists n \geq 1,\ a_n \geq C^n$. Cette dernière phrase est équivalente à $\forall R > 0,\ \exists n \geq 1,\ a_n R^n \geq 1$. Cette dernière phrase signifie que $\forall r > 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Pour tout $k \geq 1$, il suffit d'écrire

$$a_n r^n = 10^{kn} a_n R^n$$

avec $R = \frac{r}{10^k}$. On voit que $a_n R^n \geq 1 \implies a_n r^n = 10^{kn} \geq 10^k$.

Exercice 30

Soit $u := (u_n)$ une suite telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Notons $\mathrm{AD}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n).

Donner un exemple où $\mathrm{AD}(u) = \emptyset$.

Il suffit de prendre $u_n = \ln(n)$. On voit que $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ converge vers 0. D'autre part, comme $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, on a $\mathrm{AD}(u) = \emptyset$.

Supposons maintenant que $\mathrm{AD}(u) \neq \emptyset$. Montrer que si $a < b$ sont deux valeurs d'adhérences de la suite (u_n), alors $[a, b] \subset \mathrm{AD}(u)$.

Soit $\alpha \in]a, b[$. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $k \geq N$ tel que $|\alpha - u_k| \leq \epsilon$. Quitte à prendre un ϵ plus petit, on peut supposer que $\epsilon < \frac{b-a}{2}$.

Par définition, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \epsilon$, $\forall n \geq N_1$. De plus, comme $a, b \in \mathrm{AD}(u)$, il existe $p, q \geq \max\{N_1, N\}$ tels que $|u_p - a| \leq \epsilon$ et $|u_q - b| \leq \epsilon$.

On remarque que la condition $\epsilon < \frac{b-a}{2}$ impose que $p \neq q$ et que $u_p < u_q$.

Supposons que $p < q$. L'autre cas se traite de la même façon.

1er cas : $\alpha \leq u_p$. Comme $\alpha \in]a, b[$, on aura alors $a < \alpha \leq u_p \leq a + \epsilon$: donc $|\alpha - u_p| \leq \epsilon$.

2ème cas : $\alpha \geq u_q$. Comme pour le cas précédent, on montre que $|\alpha - u_q| \leq \epsilon$.

3ème cas : $u_p < \alpha < u_q$. On considère l'ensemble $X := \{k \in \{p, \ldots, q\}, u_k \leq \alpha\}$. Comme $q \notin X$, $k_o = \max X \leq q - 1$ et donc $k_o + 1 \in \{p, \ldots, q\} \cap X^c$. On a donc

$$u_{k_o} \leq \alpha < u_{k_o+1}.$$

Sachant que $|u_{k_o+1} - u_{k_o}| \leq \epsilon$, on en déduit que $|u_{k_o} - \alpha| \leq \epsilon$. Ici $k_o \geq p \geq N$. $\square$

Exercice 31 : Lemme sous-additif

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m, \quad \forall m, n \geq 1.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(\frac{u_n}{n})$ tend vers $\ell := \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Soit $k \geq 1$ et $r \in \{0, \ldots, k-1\}$. Montrer que $u_{kq+r} \leq k u_q + u_r$ pour tout $q \geq 1$.

On pose $u_0 = 0$. Cela permet d'étendre la relation : $u_{n+m} \leq u_n + u_m$, $\forall n, m \geq 0$. Soit $k \geq 1$ et $r \in \{0, \cdots, k-1\}$. On montre par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ que

$$(H_q) \qquad u_{kq+r} \leq q\, u_k + u_r.$$

(H_0) est vraie. Supposons (H_q) vraie : $u_{kq+r} \leq q\, u_k + u_r$. Alors

$$u_{k(q+1)+r} = u_{(kq+r)+k} \leq u_{kq+r} + u_k \leq (q+1)u_k + u_r.$$

La relation (H_{q+1}) a été démontrée.

En déduire que $\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}$, pour tout $k \geq 1$.

Soit $k \geq 1$. Tout entier $n \geq 1$ admet une division euclidienne par rapport à k : $n = kq + r$ avec $r \in \{0, \cdots, k-1\}$ et $q \in \mathbb{N}$. Alors

$$(1) \qquad \frac{u_n}{n} = \frac{u_{kq+r}}{kq+r} \leq \frac{q\, u_k + u_r}{kq+r} = \frac{kq}{kq+r}\frac{u_k}{k} + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_k}{k} + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_k}{k} + \frac{C_k}{n}$$

avec $C_k = \sup\{u_0, \cdots, u_{k-1}\}$.

D'après (1), la suite $(\frac{u_n}{n})$ est majorée. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} = \limsup \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R}$. L'inégalité (1) donne

$$\frac{u_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} \leq \frac{u_k}{k} + \frac{C_k}{\varphi(n)}, \qquad \forall n \geq 0, \forall k \geq 1.$$

Pour $k \geq 1$ fixé, on voit que $\lim_{n\to\infty} \frac{C_k}{\varphi(n)} = 0$. Cela montre que

$$(2) \qquad \limsup \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} \leq \frac{u_k}{k}, \qquad \forall k \geq 1.$$

Conclure.

1er cas : Supposons que $\limsup \frac{u_n}{n} = -\infty$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = -\infty = \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\}$.

2ème cas : Supposons que $\limsup \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R}$. D'après (2), la suite $(\frac{u_n}{n})$ est minorée et donc bornée. Montrons qu'elle est convergente vers $\inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\} \in \mathbb{R}$. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{\psi(n)}}{\psi(n)} = \liminf \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R}$. La relation (2) montre que

$$\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_{\psi(n)}}{\psi(n)}, \qquad \forall n \geq 1.$$

En passant à la limite, cela donne $\limsup \frac{u_n}{n} \leq \liminf \frac{u_n}{n}$. Comme on a toujours $\liminf \frac{u_n}{n} \leq \limsup \frac{u_n}{n}$, on a montré que $\limsup \frac{u_n}{n} = \liminf \frac{u_n}{n}$. Cela implique que la suite $(\frac{u_n}{n})$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Il reste à vérifier que $\ell := \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\}$.

La relation $\ell = \limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}$, $\forall k \geq 1$, implique que $\ell \leq \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\}$. Mais on a : $\forall n \geq 1$,

$$\inf\left\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\right\} \leq \inf\left\{\frac{u_k}{k}, k \geq n\right\}.$$

Sachant que $\ell = \liminf \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq n\}$, on obtient que

$$\inf\left\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\right\} \leq \ell.$$

On a bien montré que $\ell := \inf\{\frac{u_k}{k}, k \geq 1\}$.